УДК 510.55:519.37
DOI 10.47049/2226-1893-2021-1-142-167

УЗАГАЛЬНЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ МОДЕЛІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Лб.С. Чернова
к.т.н., доцент,
доцент кафедри «Інформаційні управляючі системи та технології»
С.Д. Титов
доцент кафедри «Вища математика»
Лд.С. Чернова
к.т.н., доцент,
доцент кафедри «Інформаційні управляючі системи та технології»

Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова

Анотація. *У статті розглянуто побудову узагальненої математичної моделі задачі про призначення та її розв'язку, з подальшою комп'ютерною реалізацією в середовищах символьної математики Maple та Mathematica.*

Розроблено ефективну методику розв'язку узагальненої задачі про призначення.

Виконано теоретичне обґрунтування розробленої методики та проінтерпретовано її з позицій концепції динамічної оптимізації.

Наведено модельні приклади розв'язку. На базі пакетів символьної математики Maple та Mathematica розроблено програми, які реалізують розроблений алгоритм.

Виконано альтернативний комп'ютерний розрахунок модельних прикладів та порівняно результати з ручними розрахунками.

Виконано комп'ютерні розрахунки у середовищах комп'ютерних пакетів Maple та Mathematica, використовуючи бібліотеку підпрограм ядра пакетів.

Порівняно результати модельного розв'язку з попередніми результатами.

Розроблено алгоритм використання запропонованої моделі у процедурах планування проекту.

Ключові слова*: задача про призначення, угорський метод, комбінаторна задача, система різних представників, динамічна оптимізація, модельні приклади.*

UDC 510.55:519.37
DOI 10.47049/2226-1893-2021-1-142-167

GENERALIZATION OF THE MATHEMATICAL PROBLEM OF THE ASSIGNMENT MODEL

Lb.S. Chernova
PhD, Associate Professor,
Associate Professor of «Information Control Systems and Technologies»

S.D. Tytov
associate professor of the «Higher Mathematics» department

Лd.S. Chernova
PhD, Associate Professor,
Associate Professor of «Information Control Systems and Technologies»

Admiral Makarov National Shipbuilding University

Abstract. Abstract. *The article considers the construction of a generalized mathematical model of the assignment problem and its solution, followed by computer implementation in the symbolic mathematics environments Maple and Mathematica. The effective method of solving the generalized assignment problem was developed. The theoretical justification of the developed technique was performed and it was interpreted from the standpoint of the concept of dynamic optimization. Model examples of solutions are provided. Based on the packages of symbolic mathematics Maple and Mathematica, that implements the developed algorithm. An alternative computer calculation of model examples was performed and the results were compared with manual calculations. Computer calculations were performed in the environments of the computer packages Maple and Mathematica, using the core routines library packages. The results of the model solution were compared with the previous results. The algorithm of using the proposed model in project planning procedures was developed.*

Keywords: *assignment problem, Hungarian method, combinatorial problem, system of different representatives, dynamic optimization, model examples.*

Вступ. Класична задача про призначення відіграє важливу роль в моделях та методах комбінаторної (дискретної) оптимізації. Задача належить до так званих задач булевої оптимізації, де невідомі приймають значення 0 або 1.

Розв'язок задачі про призначення може бути отриманий методом потенціалів, оскільки вона є частинним випадком транспортної задачі – об’єми попиту та пропозиції за кожним виробником та споживачем рівні одиниці. Враховуючи високий рівень виродженості первісного опорного плану математичної моделі задачі про призначення, її розв'язок на базі методу потенціалів містить багато тривіальних кроків, що уповільнює збіжність процесу розв’язку. З огляду на цей факт, доцільно розрахунки виконувати спеціальним методом – угорський метод розв’язку. Угорський метод є швидкозбіжним і адаптованим під такий клас задач.

Класичний підхід до складання математичної моделі про призначення містить суттєве обмеження – робітник призначається тільки на одну роботу і кожна робота може призначатися одному робітнику. В роботі пропонується узагальнити підхід та дозволити претенденту на включення в команду проекту бути призначеним більше ніж на одну ~~роботу~~ вакантну посаду. Це суттєво розширить клас теоретичних і практичних задач, які можливо інтерпретувати як узагальнену задачу про призначення. При реалізації проекту можна вирахувати скільки процесів можна доручати кожному члену команди проекту без ризиків затримки їх виконання.

2. Огляд літературних даних та постановка задачі. Задача про призначення у класичній постановці відноситься до двоіндексних задач транспортного типу [1; 2]. Відомий апарат розв'язку таких задач може бути використаний для знаходження оптимального розподілу задачі про призначення. Специфіка задачі про призначення стимулювала розробку спеціальних методів розв'язку. Перші роботи присвячені задачі про призначення відносяться до першої половини XX століття. В роботах Кеніга та Егерварі [3; 4; 5] задачу про призначення розглядають як задачу про знаходження оптимальних паросполучень на дводольному орієнтовному графі [6; 7; 8; 9]. Праці Кеніга та Егерварі дозволили Куну в 50-х роках розробити спеціальний метод розв'язку – Угорський метод. [10; 11; 12; 13; 14; 15; 16]. Цей класичний тип задач про призначення та її методи розв'язку використовуються до сих пір, але на практиці починають виникати задачі, в яких необхідно відхилитися від вимог класичної задачі про призначення – один претендента на одну вакантну посаду в команді і одна вакантна посада для одного претендента. Такою задачею є відома комбінаторна задача про систему різних представників [17]. У цьому типі задач на вакантне робоче місце треба призначити вже декілька робітників.

На сьогоднішній день авторам не відомі публікації присвячені розв'язку такого типу задач. З огляду на це, доцільно розробити модель узагальненої задачі про призначення та навести алгоритм її розв'язку. Використання цієї моделі у проектному менеджменті сприятиме формуванню оптимального мережевого графіка при плануванні проекту.

3. Мета та задачі дослідження. Метою роботи є розробка узагальненої математичної моделі задачі про призначення та її розв'язку, з подальшою комп'ютерною реалізацією в середовищах символьної математики Maple та Mathematica для оптимізації процедур відбору претендентів у команду проекту та визначення вимог до продукту проекту. Виконати порівняльну процедуру достовірності результатів розв'язку за розробленою методикою та вбудованими підпрограмами ядра пакетів програм.

Для досягнення цієї мети були поставлені наступні задачі:

- Побудувати загальну задачу класичного підходу задачі про призначення і навести модельний приклад розв'язку Угорським методом. На базі неї скласти узагальнену задачу, в якої порушується умова – один претендент призначається тільки на одну вакансію в проекті і кожна вакансія повинна надаватися тільки одному претенденту.

- Розробити ефективну методику розв'язку узагальненої задачі про призначення.
- Виконати теоретичне обґрунтування розробленої методики та проінтерпретувати її з позицій концепції динамічної оптимізації – принцип оптимальності Р. Белмана. Навести модельний приклад розв'язку.
- На базі пакетів символьної математики Maple та Mathematica розробити програми, які реалізують розроблений алгоритм. Виконати альтернативний комп'ютерний розрахунок модельного прикладу та порівняти результати з ручними розрахунками.
- Виконати комп'ютерні розрахунки у середовищах комп'ютерних пакетів Maple та Mathematica, використовуючи бібліотеку підпрограм ядра пакетів. Порівняти результати модельного розв'язку з попередніми результатами.
- Розробити алгоритм використання запропонованої моделі у процедурах планування проекту.

4. Класична задача про призначення.

4.1 Постановка задачі та її математична модель. Задача про призначення є однією з класичних задач теорії комбінаторної оптимізації в галузі прикладної математики. Перш ніж надати загальне означення задачі наведемо конкретні приклади, які приводять до задачі про призначення.

Одна з можливих неформальних постановок задачі про призначення має таку редакцію. В певній системі є n вакантних робочих місць, на які претендують m кандидатів. Відома матриця

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \left\| c_{ij} \right\|_{m\times n},\ i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n, \qquad (1)$$

яка дає числову оцінку $c_{ij} \geq 0$ визначеної міри ефективності у разі призначення i-го кандидата на j-те робоче місце. Призначення необхідно виконати таким чином, щоб була реалізована оптимальність сумарної ефективності від призначень – максимум або мінімум в залежності від конкретного смислу задачі. Згідно класичної постановки задачі повинно враховуватись, що кожен кандидат (претендент) може бути відібраний у команду проекту тільки один раз, і, навпаки, кожній вакансії у команді ставиться у відповідність рівно один кандидат. У разі $m > n$ (дефіцит вакансій), необхідно збалансувати систему додаванням $m-n$ фіктивних вакансій в команді проекту з нульовими числовими оцінками ефективності $c_{ij} = 0$, $i = m+1, m+2, \dots, m+(m-n)$, $j = 1,2,\dots,n$.

Якщо $n > m$ (дефіцит кандидатів), то треба додати у систему $n - m$ фіктивних кандидатів. Надалі, не порушуючи загальності міркувань, процедуру збалансування задачі про призначення будемо вважати виконаною, якщо не обумовлено протилежне.

До задачі про призначення може бути зведена задача про розпізнавання об'єктів. Так, нехай маємо n – об'єктів, для яких існує наближений опис їх властивостей, але невідомо до якого з об'єктів відноситься цей опис. Є набір числової інформації $c_{ij} \geq 0$ як міри наближеного опису кожного з них. Логічно поставити задачу про мінімізацію встановленої сумарної наближеності до об'єктів.

Змістовна постановка задачі про призначення легко інтерпретується як класична транспортна задача, інтерпретуючи її як визначення типу інформаційної системи, яку необхідно розробити на замовлення в ході реалізації проекту. Знайти оптимальний тип інформаційної системи відповідно до вимог замовника. Відомий перелік вимог і він рівний одиниці. Об'єми робіт по розробленню системи також рівні одиниці. Мінімізація вимог до інформаційної системи, що створюється в ході реалізації проекту, здійснюється за матрицею витрат на проект $\| c_{ij} \|_{n \times n}$, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,n$.

До змістовних моделей, які можуть бути інтерпретовані як задача про призначення, можна віднести множини (стейкхолдери) та відповідні до них критерії ефективності наведені у табл. 1. Критерії ефективності множин (стейкхолдерів).

Складемо математичну модель загальної задачі про призначення. Нехай у довільній активній системі U (континуумі, кластері) подано дві дискретні скінченні множини A та B. Множина $A = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ потужності $|A| = n$ та множина $B = \{B_1, B_2, \ldots B_n\}$ потужності $|B| = n$. Виконується біекція (взаємно-однозначна відповідність) $A \mapsto B$ поданою функцією $C = \| c_{ij} \|_{n \times n} : A \otimes B \to R$ (рис. 1) Необхідно виконати цей розподіл так, щоб мінімізувати значення критерія ефективності.

Таблиця 1

Критерії ефективності множин (стейкхолдерів)

Ресурси	Об'єкти	Критерії ефективності
Транспорт	Маршрути	Витрати (довжина шляху)
Обладнання (верстати)	Тех. операції	Час (кількість деталей)
Команди (інвестори)	Проекти	Прибуток (витрати)
Комівояжер	Міста (магазини)	Товарообіг (шлях)
Кандидати	Робочі місця	Витрати за призначенням
Літаки	Рейси	Час очікування

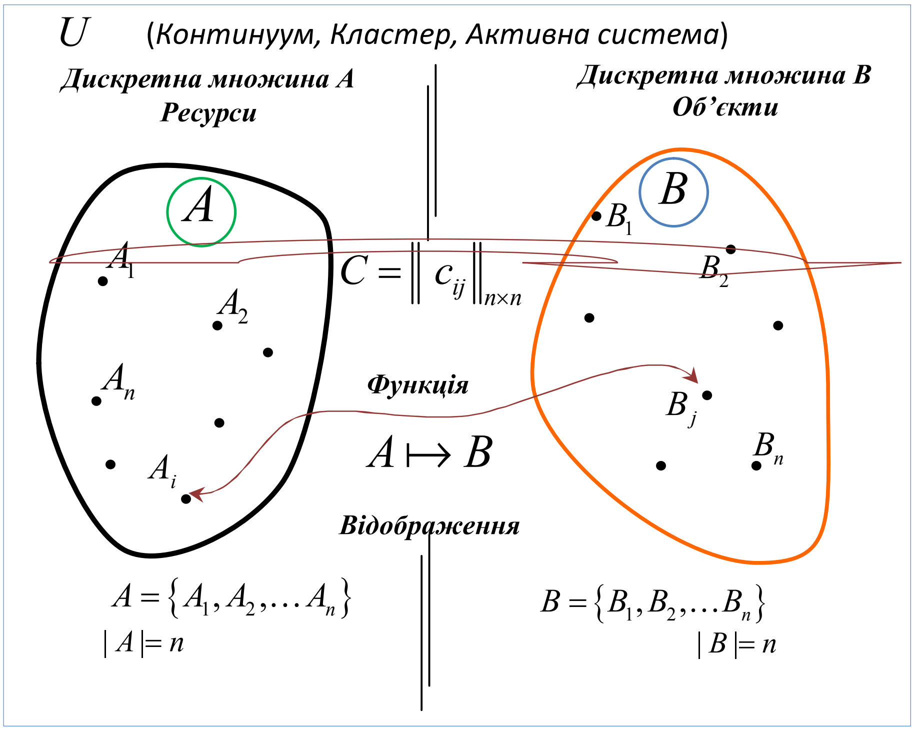


Рис. 1. Загальна постановка задачі про призначення

На підставі класичного підходу задачі про призначення, вводимо булеві змінні

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{у разі не розподілу } A_i \text{ на } B_j, \\ 1, & \text{у разі розподілу } A_i \text{ на } B_j. \end{cases} \tag{2}$$

Тоді цільова функція задачі буде мати вигляд

$$W_I = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \cdot \tag{3}$$

Система обмежень класичної задачі про призначення має наступний запис:

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\dots,n, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\dots,n, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \qquad i, j = 1,2,\dots,n.$$

Матриця припустимих планів лінійної оптимізаційної задачі (3), (4)

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = \| x_{ij} \|_{n \times n} \qquad (5)$$

є перестановочною матрицею оскільки містить по одній одиниці в кожному рядку і в кожному стовпчику. Назвемо таку матрицю перестановочною матрицею глибини $h = 1$. У разі наявності k одиниць в кожному рядку та стовпчику – матриця глибини $h = k$. Також такі матриці прийнято називати булевими(бінарними) або (0,1)-матрицями.

Для класичної задачі про призначення матриця X є також бістохастичною – сума значень по кожному рядку та стовпчику рівна одиниці.

Таким чином, класичний підхід до формулювання задачі про призначення призводить до математичної моделі лінійної дискретної оптимізації типу двоіндексної класичної транспортної задачі [1,2], яку використовуємо для визначення типу інформаційної системи. Для розв’язку цієї задачі доцільно застосовувати метод потенціалів, але враховуючи бінарний характер невідомих для розв’язку задачі розроблені спеціальні методи. Один з найбільш ефективних методів є, так званий, угорський метод. Сутність угорського методу, як і симплекс-методу, полягає у послідовному переході від поточного припустимого плану X до поліпшеного, реалізацією спеціального алгоритму. На кожному кроці виконується перевірка на оптимальність [10; 11; 12; 13].

Першим кроком угорського методу є модифікація матриці

$$C = \| c_{ij} \|_{n \times n}.$$

У кожному рядку обирають найменше значення і віднімають його від елементів відповідного рядку. Це забезпечує наявність принаймні одного нуля в кожному рядку. Аналогічну процедуру виконують по стовпчикам. Як результат цих перших модифікаційних дій – гарантована наявність принаймні одного нуля в кожному рядку та стовпчику.

Другим кроком угорського методу є аналіз модифікованої C. У разі можливості обирання по одному нулю в кожному рядку та стовпчику, стверджується, що отримано оптимальний розв'язок. Задача про призначення вважається розв’язаною. Якщо таке обирання неможливо необхідно подальша модифікація матриці C і відповідно перехід на третій крок.

Третім кроком угорського методу необхідно якомога найменшою кількістю перехресних прямих викреслити всі нулі. В результаті такої дії з'являються три типи елементів матриці C. Перший тип – невикреслені елементи. Другий тин – викреслені елементи. Третій тип – викреслені і знаходяться на перетині прямих. Серед невикреслених елементів обирають найменше значення. Значення цього елементу віднімають від значень невикреслених елементів та додають до елементів третього типу. Після цієї процедури алгоритм повторюється починаючи з першого кроку.

Наведена методика угорського методу є швидкозбіжною та забезпечує за скінчену кількість кроків отримання розв'язку задачі.

4.2. Модельний приклад № 1. Розв'язати класичну задачу про призначення подану матрицею розподілу

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 9 & 4 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 9 \\ 5 & 9 & 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок

Маємо класичну задачу про призначення у вигляді

$$\mathrm{W}_I = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,3,4, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,3,4, \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \qquad i,j = 1,2,3,4.$$

Для розв'язку задачі угорським методом виконуємо перший крок модифікації матриці C

$$C=\begin{array}{c c}
 & \min \\
\begin{bmatrix} 4 & 3 & 9 & 4 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 9 \\ 5 & 9 & 9 & 4 & 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}
\end{array}
\xrightarrow{\textit{Перший крок}}$$

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\min & \begin{matrix} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{matrix}
\end{array}
\xrightarrow{\textit{Перший крок}}$$

$$\xrightarrow{\textit{Перший крок}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Згідно з вимогами другого кроку пересвідчуємось, що у модифікованій матриці C неможливо обрати по одному нулю у кожному рядку та стовпчику. Необхідно перейти до третього кроку алгоритму угорського методу.

Найменшою кількістю взаємно перпендикулярних прямих ліній викреслюємо всі нулі поточної матриці C та виконуємо алгоритм третього кроку. Після цього аналізуємо можливість обирання по одному нулю у рядках та стовпчиках.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{\textit{Третій крок}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{\textit{Третій крок}}$$

$$\xrightarrow{\textit{Третій крок}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 6 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{Третій крок}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 6 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Один з двох можливих варіантів обирання по одному нулю в кожному рядку та стовпчику наведено червоними колами. Таким чином задача розв'язана. Знайдено оптимальний розподіл в класичної задачі про призначення, який забезпечує мінімальне значення цільової функції.

Оптимальний розподіл

$$X_{\min}^{opt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

і відповідне значення цільової функції

$$\mathrm{W}_{\min}^{opt} = 4 + 2 + 1 + 1 + 9 = 17\,.$$

Зауваження:

Ідея викреслювання рядків та стовпчиків, в алгоритмі угорського методу, підкорюється не випадковому закону, а детермінованому тлумаченню, яке базується на теоремі про число максимально незалежних елементів бінарних матриць.

Назвемо два елемента матриці незалежними, якщо вони не лежать на одній лінії. Лінією матриці називають її рядок або стовпчик. На підставі введених понять виконується теорема.

Теорема. Максимальне число незалежних одиниць довільної бінарної матриці дорівнює мінімальному числу ліній, які містять всі одиниці матриці.[17]

Наведемо приклад, який інтерпретує теорему. Розглядаємо матрицю

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одиничні елементи матриці A містяться у другому та четвертому стовпчиках та у четвертому та п'ятому рядках. Варіант викреслювання найменшою кількістю ліній всіх одиниць матриці має такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

З огляду на це, максимальна кількість незалежних одиниць матриці дорівнює чотирьом.

Задача про призначення пов'язана з комбінаторними конфігураціями, оскільки оперує бінарними матрицями. Розглянемо приклад, який проінтерпретує такий взаємозв'язок.

Нехай маємо семиелементну множину $U=[1,2,3,4,5,6,7]$. Необхідно записати триелементні підмножини множини U, за умови, що довільні два, але різні елементи цих підмножин, містяться тільки в одній з них.

Неважко перевірити, що такими підмножинами буде наступна конфігурація

$$\{1,2,4\},\ \{1,3,7\},\ \{1,5,6\},\ \{2,3,5\},\ \{2,6,7\},\ \{3,4,6\},\ \{4,5,7\}.$$

Наведеній комбінаторній конфігурації поставимо у відповідність матрицю інцидентності

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Звернемо увагу на той факт, що кількість одиниць у кожному рядку та стовпчику однакова і рівна трьом. Це дозволяє розглядати таку матрицю інцидентності як узагальнену матрицю призначення X .

Наявність матриці інцидентності, яка відповідає матриці розподілу задачі про призначення, дозволила перейти до використання математичного апарату теорії графів.[3,4,5] Так і сталось, щоісторично алгоритм угорського методу було розроблено як задачу знаходження мінімального потоку(паросполучень) на дводольному графі

5. Узагальнена задача про призначення та алгоритм її розв'язку

Назвемо узагальненою задачею про призначення задачу вигляду

$$\mathrm{W}_I = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = k, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = k, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

де k може приймати значення $k = 2, 3, \ldots, n$ і характеризує умовну глибину розподілу задачі про призначення.

Підхід до розв'язку узагальненої задачі про призначення проінтерпретуємоз позицій задачі динамічної оптимізації [12; 13; 14]. Згідно з концепцією динамічної оптимізації весь ланцюг розв'язку задачі розбивають на окремі елементарні етапи. На кожному такому етапі розв'язується однотипна спрощена задача. Основним методом динамічної оптимізації є метод рекурентних співвідношень. Водночас, побудова такого алгоритму підкорюється відомому принципу Р. Белмана. Принцип Р. Белмана ґрунтується на тому, що яким би не було початкове становище системи на довільному поточному етапі оптимізації, наступний етап обирається з умови оптимальності відносно попереднього стану. Такий підхід забезпечує у ланцюгах розв'язку не локально оптимальний, а глобально оптимальний розв'язок для процесу в цілому.

В нашому випадку для розв'язку узагальненої задачі про призначення фіксується попередній оптимальний стан підстановкою граничних значень (великих або маленьких) в залежності від смислу задачі, у матрицю $C = \left\| c_{ij} \right\|_{n \times n}$. Наступну задачу розв'язують канонічним методом(угорський метод). Потім знову в оптимальні позиції вже зміненої матриці $C = \left\| c_{ij} \right\|_{n \times n}$ підставляють граничні значення та розв'язують задачу. Кількість ітерацій дорівнює глибині узагальнення задачі про призначення. Застосуємо запропонований підхід для розв'язку модельної задачі.

5.1. Модельний приклад № 2

Знайти мінімальний розв'язок задачі про призначення

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 1 & 6 \\ 7 & 7 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

з глибиною узагальнення $k = 3$.

Розв'язок

Маємо наступну математичну модель:

$$\mathrm{W}_I = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 3, \quad j = 1,2,3,4, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 3, \quad i = 1,2,3,4, \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad i, j = 1,2,3,4.$$

Розбиваємо задачу на три кроки. На першому кроці розв’язуємо задачу за умови

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,3,4, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,3,4, \end{cases}.$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad i, j = 1,2,3,4.$$

Маємо

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 1 & 6 \\ 7 & 7 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{Угорський метод}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

На другому кроці фіксуємо знайдений оптимальний план попереднього становища системи підстановкою великих значень на місця оптимального розв’язку у матрицю C (позначені червоним кольором). Для нової матриці $C^{(1)}$ виконуємо оптимальний розв'язок. В результаті отримаємо

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 6 \\ 7 & 7 & 3 & 9 \\ 5 & 9 & 8 & 3 \\ 9 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{Угорський метод}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

На третьому кроці виконуємо аналогічні підстановки і в результаті маємо такий оптимальний розрахунок

$$C^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 8 & 3 \\ 9 & 9 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{Угорський метод}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Об’єднуючи попередньо виконані три кроки отримаємо остаточний розрахунок у вигляді наступного плану

$$X_{\min}^{opt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оптимальне значення цільової функції буде рівно $\mathrm{W}_I(X_{\min}^{opt}) = 44$.

5.2. Комп'ютерні розрахунки та порівнянняз розрахунками за запропонованим алгоритмом

Нехай задача про призначення подана матрицею розподілу

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 9 & 5 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 4 & 6 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 2 & 5 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 8 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 8 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 2 & 9 & 1 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Знайти оптимальний розв'язок узагальненої задачі з глибиною $k = 3$.

Розв'язок

Маємо наступну математичну модель:

$$\mathrm{W}_I = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 3, \quad j = 1,2,\ldots,7, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 3, \quad i = 1,2,\ldots,7, \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad i,j = 1,2,\ldots,7.$$

На початку наведемо розв'язок задачі за запропонованою методикою. Розбиваємо задачу на три кроки. На першому кроці розв’язуємо задачу за умови

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,7, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,7, \end{cases}$$
$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad i, j = 1,2,\ldots,7.$$

Виконуємо перший крок модифікації матриці C

$$C = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 9 & 5 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 4 & 6 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 2 & 5 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 8 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 8 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 2 & 9 & 1 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \min \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{array} \xrightarrow{\text{Перший крок}} C^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 & 7 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 8 & 4 & 8 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 5 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 5 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccccc} \min & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Перший крок}} C^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 5 & 4 & 8 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Згідно з вимогами другого кроку угорської методики у модифікованій матриці $C^{(2)}$ перевіряємо можливість обрати по одному нулю у кожному рядку та стовпчику. Така можливість існує. Відповідні елементи обведено червоними колами, тому третій крок угорської методики виконувати немає потреби. Отримано розв’язок першої ітерації загальної задачі.

$$X_{opt}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathrm{W}_I^{(1)}(X_{opt}^{(1)}) = 16.$$

Для початку другого етапу розв'язку задачі позиції матриці призначення, які відповідають оптимального розв'язку першого етапу, замінюємо на гранично великі значення (для прикладу достатньо значення 9). В результаті маємо початкову матрицю другого етапу розрахунків у вигляді:

$$C^{(3)} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 4 & 7 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 7 & 2 & 9 & 5 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 4 & 9 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 9 & 5 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 8 & 9 & 6 \\ 8 & 4 & 8 & 7 & 9 & 4 & 9 \\ 2 & 9 & 9 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{Перший крок}}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 & 7 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 5 & 0 & 7 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 5 & 7 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 8 & 8 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(Штучно введені значення виділено червоним кольором)

$$\xrightarrow{\text{Перший крок}} C^{(4)} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 & 6 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 0 & 4 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 7 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 8 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Маємо розв'язок другого етапу

$$X_{opt}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathrm{W}_I^{(2)}(X_{opt}^{(2)}) = 22.$$

Виконуємо аналогічні перетворення на третьому етапі розрахунків.

$$C^{(5)} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 & 6 & 4 & 9 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 9 & 4 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ 5 & 0 & 5 & 7 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 9 & 8 & 8 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Оптимальний розв'язок третього етапу розрахунків представляється у вигляді

$$X_{opt}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \mathrm{W}_I^{(3)}(X_{opt}^{(3)}) = 27 .$$

Об’єднуючи всі три ітерації можемо отримати розв'язок поставленої задачі, як суму

$$X_{opt}^{\min} = X_{opt}^{(1)} + X_{opt}^{(2)} + X_{opt}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Відповідне значення цільової функції

$$\mathrm{W_I}(X_{opt}^{\min}) = 16 + 22 + 27 = 65 .$$

Для перевірки достовірності розв’язку виконаємо порівняння отриманого ручного розрахунку з комп’ютерним розв’язком за розробленою програмою в середовищі пакету символьної математики Maple. Фрагмент вихідного коду програми наведений нижче.

```
################################################
`@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@`;
A:=Matrix([[1,2,4,7,8,1,6],[4,1,7,2,9,5,9],
        [9,4,3,4,6,4,4],[8,2,7,2,5,3,5],
        [7,5,4,6,8,2,6],[8,4,8,7,9,4,3],
        [2,9,1,1,5,2,4]]):
C=A;
`@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@`;
```

```
prhc:=3:
zf:=add( add(A[i,j]*x[i,j],j=1..nr), i=1..nr ):
eq1:=seq(add(x[i,j],j=1..nr)=prhc,i=1..nr):
eq2:=seq(add(x[i,j],i=1..nr)=prhc,j=1..nr):
##################################################
`Binary`;
with(Optimization):
ss1:=LPSolve(zf, {eq1,eq2}, assume = {binary}):
Aoptb:=Matrix(nr):
for i to nr do
for j to nr do
Aoptb[i,j]:=rhs(ss1[2,nr*(i-1)+j])
end do:
end do:
#############################################################
ss1m:=LPSolve(zf, {eq1,eq2}, assume = {binary},maximize):
Aoptb1:=Matrix(nr):
for i to nr do
for j to nr do
#######################################
Aoptb1[i,j]:=rhs(ss1m[2,nr*(i-1)+j])
end do:
end do:
###
X[optmin]=Aoptb;
W[min]=ss1[1];
#################################
`@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@`;
```

Результати розрахунків за цією програмою

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 9 & 5 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 4 & 6 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 2 & 5 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 8 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 8 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 2 & 9 & 1 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Binary

$$X_{optmin} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$W_{\min} = 65$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Як видно вони повністю збігаються з розрахунками за запропонованою методикою.

Альтернативним комп'ютерним розрахунком був розрахунок в середовищі пакету символьної математики Mathematica. Фрагмент вихідного коду програми наведений нижче:

```
(* Узагальнена задача про призначення.
l - кількість членів команди проекту
n - кількість робіт (вакантних місць)
k - можлива кількість вакансій, на які претендує кандидат*)
(* Вихідні дані*)
l = 7; n = 7; k = 3;
(* Матриця витрат по відбору кандидатів*)
 C1 = {{1, 2, 4, 7, 8, 1, 6}, {4, 1, 7, 2, 9, 5, 9}, {9, 4, 3, 4, 6, 4, 4},
        {8, 2, 7, 2, 5, 3, 5}, {7, 5, 4, 6, 8, 2, 6}, {8, 4, 8, 7, 9, 4, 3},
        {2, 9, 1, 1, 5, 2, 4}}
MatrixForm [%]
(* Задання двовимірних змінних x[i,j] - генерація матриці призначення*)
X = Table[x[i, j], {i, l}, {j, n}];
MatrixForm[%];
(* Задання одновимірних змінних k - генерація правих частин системи \
обмежень*)
K = Table[k, {l + n}];
(* Одновимірний робочий масив – xi [i] (Розміщення матриці призна-
чення)*)Xi = xi /@ Range[(l*n)];
(* Розміщення x[i,j] в одновимірному xi[i] *)
```

```
m = 0;
Do[Do[xi[m + 1] = x[i, j]; m = m + 1, {j, 1, n}], {i, 1, l}]
(* Початок опису оптимізаційної задачі*)
(* Цільова функція - мінімізація витрат за призначенням*)
WI = \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(i = 1\), \(l\)]\(\*Underoverscript
Box[\(\[Sum]\), \(j = 1\), \(n\)]\((C1[\([\)\(i, j\)\(]\)] X[\([\)\(i, j\)\(]\)])\)\)\)
(* Масиви сум за рядками та стовпчиками*)
Om1 = Table[\!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(j = 1\), \(n\)]\(X[\([\)\
(i, j\)\ (]\)]\)\), {i, l}];
Om2 = Table[\!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(i = 1\), \(l\)]\(X[\([\)\
(i, j\)\(]\)]\)\), {j, n}];
(* Рівняння системи обмежень за дачі оптимізації*)
eq1 = And @@ Thread[Om1 == k];
eq2 = And @@ Thread[Om2 == k];
eq3 = And @@ Thread[Thread[0 <= Xi <= 1]];
(*Розрахунок за бібліотечною програмою*)
mm2 = Minimize[{WI, eq1 && eq2 && eq3 && Xi \[Element] Integers}, Xi]
(* Перехід до зручного двовимірного та бінарного представлення \
оптимального розвязку*)
X1 = Table[x1[i, j], {i, l}, {j, n}];
m = 0;
Do[Do[x1[i, j] = mm2[[2, m + 1, 2]]; m = m + 1, {i, l}], {j, n}]
MatrixForm[Table[x1[j, i], {i, l}, {j, n}]]
(* Графічне представлення оптимальної матриці призначень *)
X2 = Table[x1[j, i], {i, l}, {j, n}];
MatrixPlot[X2, ColorRules -> {1 -> Green, 0 -> Yellow}, Mesh -> All,
 PlotRange -> {2, 30}]
(*   Zu end   *)
```

Результати розрахунків модельної задачі за цією програмою мають вигляд:

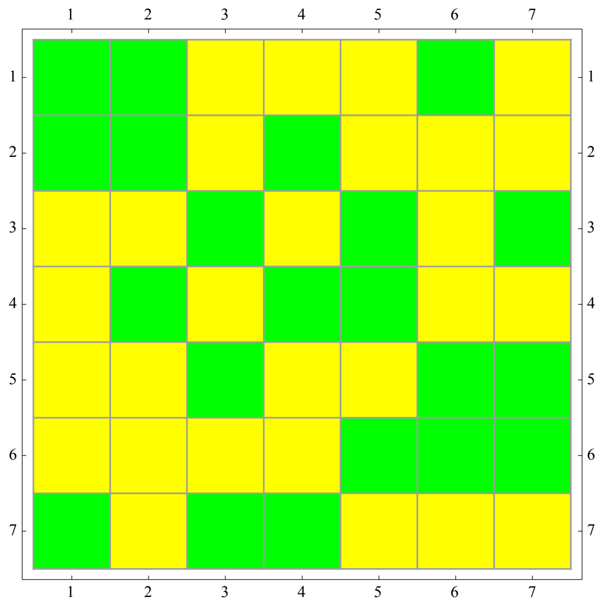
Матриця C

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 9 & 5 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 4 & 6 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 2 & 5 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 8 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 8 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 2 & 9 & 1 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Оптимальний розподіл $X_{\min}^{opt}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Графічна інтерпретація оптимального розподілу $X_{\min}^{opt}$



Як видно з розрахунків – результати збігаються.

6. Результати та висновки дослідження

- Виконано формалізований підхід до складання класичної задачі про призначення. Наведено розв'язок модельної задачі Угорським методом.
- Сформульовано узагальнену задачу, в якій на одну вакансію у команді проекту може бути призначено декілька кандидатів. Складено математичну модель узагальненої задачі.

- Розроблено алгоритм розв’язку узагальненої задачі. Виконано теоретичне обґрунтування алгоритму. Інтерпретацію алгоритму наведено як задачі динамічної оптимізації.
- Наводиться розв’язок модельного прикладу за запропонованим методом.
- З метою перевірки та підтвердження результатів розрахунків розроблено програми на базі пакетів символьної математики Maple та Mathematica, як з використанням бібліотеки стандартних підпрограм, так і без них.. Виконані результати обчислень показали збіг результатів.
- В подальшому важливим залишається дослідження випадків різної кількості кандидатів, які відбираються до команди.
- Розроблений метод розв’язку узагальненої задачі про призначення показав свою ефективність і може бути рекомендованим для розв’язку більш розширеного класу задач типу задачі про призначення.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. – К.: ЗАТ «ВІПОЛ», 2000. – 688 с.*
2. *Зайченко Ю.П. Исследование операций: Учебник для вузов. – К.: Вища школа, 1975. − 319 с.*
3. *Kuhn H.V. The Hungarian method for the assignment problems. Naval. Res. Logist. Quart. 2 (1955), 83-97.*
4. *Kuhn H.V. Variants of the Hungarian method for the assignment problems. Naval. Res. Logist. Quart. 3 (1956), 253-258.*
5. *Konig D. Theory of finite and infinite graphs. Boston: Birkhauser, 1990. 426 p. doi: 10.1007/978-1-4684-8971-2*
6. *Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп’ютерна дискретна математика: − Харків, 2004. − 480 с.*
7. *Kenneth H. Rosen Discrete Mathematics and Its Applications 2002 by McGrawHill Science, 928 p.*
8. *Кузьменко І.М. К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. − 71 с.*
9. *Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. − К.: Видавнича група BHV, 2007. − 368 с.*
10. *Burkard, Rainer; M. Dell'Amico, S. Martello (2012). Assignment Problems (Revised reprint). SIAM. ISBN 978-1-61197-222-1.*
11. *Бех О.В. Математичне програмування:Навч. посібник / О.В. Бех, Т.А. Городня, А.Ф. Щербак. – Львів: Магнолія-2006, 2014. – 200 с.*
12. *Дзюбан І.Ю. Методи дослідження операцій / І.Ю. Дзюбан, О.Л. Жиров, О.Г. Охріменко. – Київ: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2005. – 108 с.*
13. *Дослідження операцій в економіці: Підручник / За ред. І.К. Федоренко, О.І. Черняка. – К.: Знання, 2007. – 558 с. – (Вища освіта XXI століття).*

14. *Крушевський А.В. Математичне програмування в економіці та управлінні: Навч.-метод. посібник / А.В. Крушевський, М.Ф. Тимчук. – К.: ІММБ, 2001. – 107 с.*
15. *Толбатов Ю.А. Математичне програмування: Підручник для студ. вищ. навч. закладів / Ю.А. Толбатов, Є.Ю. Толбатов. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. – 432 с.*
16. *Кутковецький В.Я. Дослідження операцій: Навч. посібник. − К,: Вид-во «Професіонал», 2004. − 350 с.*
17. *Тараканов В.Е. Комбинаторные задачи и (0,1) – матрицы. − М.: Наука, 1985. −192 с.*

REFERENCES

1. *Zaichenko, Yu.P., (2000). Doslidzhennya operaciy [Follow-up operations]. – Kyiv.: ZAT "VIPOL" [in Ukrainian].*
2. *Zaichenko, Yu.P., (1975). Isledovanie operaciy [Operations Research]: Uchebnik dlya vuzov – A Textbook for High Schools. – Kyiv: Vishcha schkola [in Russian].*
3. *Kuhn, H.V. (1955), The Hungarian method for the assignment problems. Naval. Res. Logist. Quart. 2, (83-97) [in English].*
4. *Kuhn, H.V. (1956), Variants of the Hungarian method for the assignment problems. Naval. Res. Logist. Quart. 3, (253-258) [in English].*
5. *Konig, D. (1990), Theory of finite and infinite graphs. Boston: Birkhauser, doi: 10.1007/978-1-4684-8971-2 [in English].*
6. *Bondarenko, M.F., Bilous N.V., Rutkas A.G., (2004). Computerna diskretna matematika [Computer discrete mathematics]: – Kharkiv [in Ukrainian]*
7. *Kenneth, H. Rosen Discrete Mathematics and Its Applications 2002 by McGrawHill Science [in English].*
8. *Kuzmenko, I.M.(2020), … Kyiv: KPI im. Igor Sikorsky [in Ukrainian].*
9. *Nikolsky, Yu.V., Pasichnik V.V., Shcherbina Yu.M. (2007). Diskretna matematika [Discrete mathematics]. – Kyiv.: Vidavnicha gruppa BHV [in Ukrainian].*
10. *Burkard, Rainer; M. Dell'Amico, S. Martello (2012). Assignment Problems (Revised reprint). SIAM. ISBN 978-1-61197-222-1. [in English].*
11. *Bekh, O.V. (2014). Matematichne programyvannya [Mathematical programming]: – Lviv: Magnolia-2006 [in Ukrainian].*
12. *Dzyuban, I.Yu.(2005). Metodi doslidzhennya operatciy [Methods of follow-up operations]: Kyiv: IVC Vydavnitstvo «Polytekhnika» [in Ukrainian].*
13. *Doslidzhennya operatciy v economitci [Recent operations in the economy]:– Kyiv: Knowledge, (2007) [in Ukrainian].*
14. *Krushevsky, A.V. (2001). Matematichne programuvannya v ekonomitci ta upravlinni [Mathematical programming in economics and management]: Kyiv: IMMB [in Ukrainian].*

15. *Tolbatov, Yu.A.(2008). Matematichne programuvannya [Mathematical programming]: – Ternopil: Assistants and assistants [in Ukrainian].*
16. *Kutkovetsky, V.Ya. (2004). Doslidzhennya operatcii [Follow-up operations]: – Kyiv: Type «Professional» [in Ukrainian].*
17. *Tarakanov, V.E.(1985) Kombinatornie zadachi i (0,1) – matritsi [Combinatorial problems and (0,1) matrices]. − M.: Nauka [in Russian].*

Стаття надійшла до редакції 15.09.2021

Посилання на статтю: Чернова Лб.С., Титов С.Д., Чернова Лд.С. Узагальнення задачі про призначення // Вісник Одеського національного морського університету: Зб. наук. праць, 2022. № 1(67). С. 142-167. DOI 10.47049/ 2226-1893-2022-1-142-167.

Article received 15.09.2021

Reference a JournalArtic: Chernova Lb.S., Tytov S.D., Chernova Ld.S. Generalization of the mathematical problem of the assignment model // Herald of the Odessa national maritime university. 2022. № 1(67). 142-167. DOI 10.47049/ 2226-1893-2022-1-142-167.