

УДК 517.946

DOI 10.47049/2226-1893-2023-3-143-164

**ПРОЄКЦІЙНИЙ МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ
КОНДУКТИВНОГО ПЕРЕНОСУ**

В.М. Челабчі

к.т.н., професор кафедри «Технічна кібернетика й інформаційні технології
ім. професора Р.В. Меркта»

І.А. Тузова

доцент кафедри «Технічна кібернетика й інформаційні технології
ім. професора Р.В. Меркта»

Т.Д. Панченко, В.І. Стародуб, О.В. Тузов, В.В. Челабчі

старші викладачі кафедри «Технічна кібернетика й інформаційні технології
ім. професора Р.В. Меркта»

Одеський національний морський університет, Одеса, Україна

Анотація. У статті розглядаються процеси кондуктивного перенесення: дифузії, фільтрації та тепла. Такі процеси досить добре описуються рівняннями Лапласа чи Пуассона з різними граничними умовами (Дирихле і Неймана). Існує досить багато чисельних методів розв'язання таких рівнянь: різницеві методи, методи кінцевих та граничних елементів. У ряді випадків існують проблеми відображення області визначення функції, коли область має складну або багатозв'язкову форми. Виходом є використання розподілених обчислень. Мета досліджень авторів – розробка універсальної методики вирішення таких завдань, інваріантних до описаних процесів та конфігурації об'єктів. Запропоновано метод суттєвого скорочення розрахункового часу за рахунок використання розподілених обчислень. Відповідно до особливостей методики вся область розбивається на кінцеву кількість локальних областей, в яких шукають рішення за умови зшивання рішень в областях. Форма локальних областей може бути різних розмірів та конфігурацій. Запропоновано оригінальний метод зшивки рішень у сусідніх локальних областях.

Для оцінки ефективності запропонованої методики проведено рішення низки тестових завдань. Проводилося рішення рівняння Пуассон для областей різної форми. Отримано гарне узгодження аналітичних та чисельних рішень. Проведено також чисельне дослідження качки корпусу судна в ідеальній рідині, що не стискається. Вирішувалося завдання про вертикальні коливання прямокутного контуру на глибокій воді. Оцінка спроможності методики проводилася порівнянням результатів обчислювального та натурного експериментів.

Ключові слова: локально-проекційний метод, кондуктивний, перенос, рівняння Лапласа, Пуассона.

UDC 517.946

DOI 10.47049/2226-1893-2023-3-143-164

**PROJECTION METHOD FOR SIMULATION
OF CONDUCTIVE TRANSFER**

V.M. Chelabchi

Candidate of Technical Science,
Professor of the Department «Technical Cybernetics and Information Technologies
named after Professor R.V. Merkt»

I.A. Tuzova

Associate Professor of the Department «Technical Cybernetics and Information
Technologies named after Professor R.V. Merkt»

T.D. Panchenko, V.I. Starodub, O.V. Tuzov, V.V. Chelabchi

Senior Lecturers of the Department «Technical Cybernetics and Information
Technologies named after Professor R.V. Merkt»

Odesa national maritime university, Odesa, Ukraine

Abstract. *The article deals with the processes of conductive transfer: diffusion, filtration and heat. Such processes are quite well described by the Laplace or Poisson equations with different conditions on the boundaries (Dirichlet and Neumann). There are quite a lot of numerical methods for solving such equations: difference methods, methods of finite and boundary elements. In some cases, there are problems of reflecting the domain of a function when the domain has a complex shape or is multiply connected. The way out is to use distributed computing. The purpose of the authors' research is to develop a universal methodology for solving such problems that are invariant to the described processes and to the configuration of objects.*

A method is proposed for significantly reducing the estimated time through the use of distributed computing. In accordance with the peculiarities of the methodology, the entire area is divided into a finite number of local areas in which solutions are sought, provided that the solutions in the areas are joined. Approximation of the solution in the local area can be carried out by almost any function. The only limitation is the absence of breaks in the function and its derivatives. The shape of local areas can be of various sizes and configurations. Local areas can overlap each other. Boundary conditions can be implemented in local areas. An original method for iterative matching of solutions in adjacent local domains is proposed.

To evaluate the effectiveness of the proposed methodology, a number of test problems were solved. The Poisson equation was solved for regions of different shapes. Good agreement between analytical and numerical solutions is obtained.

A numerical study of the ship's hull rolling in an incompressible ideal fluid was also carried out. The problem of vertical oscillations of a rectangular contour in deep water was solved.

The Laplace equation was solved. Various boundary conditions were used: a condition on the surface of an undisturbed liquid, non-reflecting conditions on vertical virtual boundaries, a condition on a horizontal virtual boundary simulating the condition on deep water.

The consistency of the methodology was assessed by comparing the results of computational and full-scale experiments.

Keywords: *local projection method, conductive, transfer, Laplace, Poisson equations.*

Основи локально-проекційного методу. В основу локально-проекційного методу покладений варіаційний підхід [1], при якому шукане рішення апроксимується функцією $F(x, y, z)$ яка нерозривна у всій області визначення і має нерозривні приватні похідні першого і другого порядку. Вираження для вибраної функції і її похідних підставляються в рівняння математичної моделі і умови однозначності. Значення коефіцієнтів апроксимуючої функції шукають в умовах мінімізації суми квадратів нев'язок правої і лівої частин кожного рівняння (або умови однозначності) в кінцевій безлічі вузлових точок, які розташовані в області визначення рішення.

Відповідно до особливостей методики, вся область розбивається на кінцеву кількість зон (областей), в яких шукають рішення при умові зшивки рішень по кордонах зон.

З областю визначення рішення зв'язується глобальна система координат x, y, z .

З кожною із зон зв'язується локальна система відносних координат з осями ξ, η, ζ , що орієнтовані паралельно осям відповідно x, y, z .

Призначається декілька типових (базових) видів зон зі своїми локальними координатними системами ξ, η, ζ (рис. 1). Форма зони, розташування початку локальних координат і розміщення вузлових точок (в яких відбувається мінімізація суми квадратів нев'язок) у достатній мірі довільні.

Значення глобальних координат x, y, z і значення локальних (відносних) координат ξ, η, ζ вузлових точок окремої зони пов'язані залежністю (1)

$$x = \xi \cdot mx_{nz} + xO_{nz}, \quad y = \eta \cdot my_{nz} + yO_{nz}, \quad z = \zeta \cdot mz_{nz} + zO_{nz}, \quad (1)$$

де $mx_{nz}, my_{nz}, mz_{nz}$ – масштабні коефіцієнти зони з індексом nz ;

$xO_{nz}, yO_{nz}, zO_{nz}$ – глобальні координати зони з індексом nz (глобальні координати початку локальної системи координат зони).

У принципі, коефіцієнти можуть приймати різні значення. Але для зручності викладання і з метою економії обчислювальних ресурсів доцільно приймати однакові значення масштабних коефіцієнтів $mx = kz, my = kz, mz = kz, kz$ – єдиний масштабний коефіцієнт зони.

На рис. 1 показана схема розміщення локальної зони в системі глобальних координат з організацією розподілених обчислень.

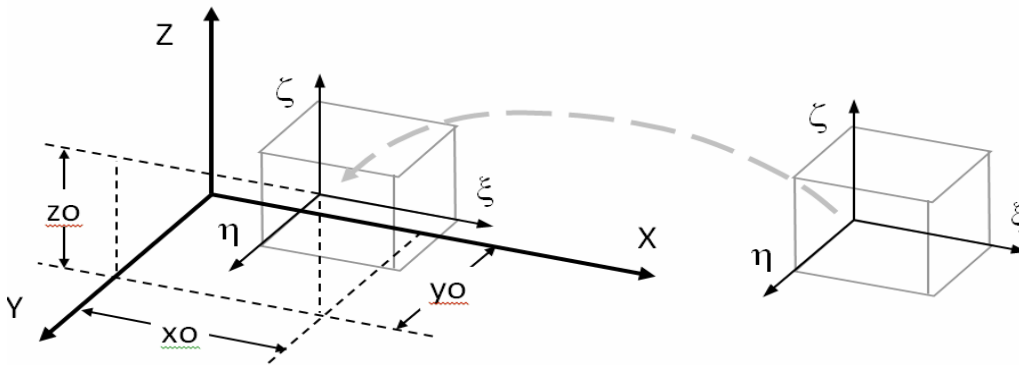


Рис. 1. Схема зв'язку глобальних і локальних координат

Джерело: Власна розробка авторів (Source: Own elaboration)

Досвід застосування локально-проекційного методу. У загальному випадку математична модель об'єкта представляється рівнянням Лапласа, Пуассона або теплопровідності. Розглядаються задачі з граничними умовами Діріхле, Неймана або їх комбінаціями. Математичні моделі описано в [2; 3].

Для вирішення подібних завдань використовувалися різні чисельні методи: метод кінцевих елементів [4-13], метод Галеркіна [14; 15]. У ряді випадків розглядалися проекційні методи [16-19].

Завжди актуальними є питання дослідження процесів коливання суден. У роботах [19] та [20] розглянуто питання адаптації локально-проекційного методу до вирішення задач коливання суден.

Розглядалася задача генерації хвиль у важкій ідеальній рідині, що викликано гармонійними коливаннями корпусу судна будь-якої конфігурації. Зазначалося, що амплітуда генерованих хвиль і переміщення корпусу щодо незбурненої поверхні можна порівняти з осадкою. Хвилі поширювалися в нескінченному напівпросторі без відображення та поглинання [6].

У роботі [21] розглядалася задача визначення впливу хвиль, що набігають на берег укріпленої стінкою.

Моделювання кондуктивного переносу. Зазвичай при дослідженні кондуктивних процесів дифузії, фільтраційної течії та стаціонарного теплопереносу використовується математична модель у вигляді (2)-(4).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi(x, y, z) = P(x, y, z), \quad (2)$$

$$\Phi \Big|_S = F(x_{ms}, y_{ms}, z_{ms}), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_S = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \cos(\alpha) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \cos(\beta) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \cos(\gamma) \right) = \text{Fn}(x_{\text{msn}}, y_{\text{msn}}, z_{\text{msn}}), \quad (4)$$

де Φ – шукана функція;

F_s, Fn – чисельні значення граничних умов для точок на кордоні області S ;

$\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$ – направляючі косинуси;

ms – індекс точки, де реалізовано граничні умови (3);

msn – індекс точки, де реалізовано граничні умови (4).

При переході від глобальної системи координат до системи локальних координат зони отримуємо (5)-(7)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \Phi(\xi, \eta, \zeta) = kz^2 \cdot P(\xi, \eta, \zeta), \quad P(\xi, \eta, \zeta) = P(x, y, z), \quad (5)$$

$$\Phi(\xi_{ms}, \eta_{ms}, \zeta_{ms}) = F(\xi_{ms}, \eta_{ms}, \zeta_{ms}), \quad (6)$$

де $F(\xi_{ms}, \eta_{ms}, \zeta_{ms}) = F(x_{ms}, y_{ms}, z_{ms})$

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{d\Phi}{d\xi} \times \cos(\alpha) + \frac{d\Phi}{d\eta} \times \cos(\beta) + \frac{d\Phi}{d\zeta} \times \cos(\gamma) = kz \times \text{Fn}(\xi_{\text{msn}}, \eta_{\text{msn}}, \zeta_{\text{msn}}), \quad (7)$$

де $\text{Fn}(\xi_{\text{msn}}, \eta_{\text{msn}}, \zeta_{\text{msn}}) = \text{Fn}(x_{\text{msn}}, y_{\text{msn}}, z_{\text{msn}})$.

Функція, яка апроксимує рішення в зоні, може мати різний вигляд. У нашому випадку доцільно приймати (8)

$$\Phi = \sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=0}^{in} a_{ijk} \cdot \xi^i \cdot \eta^j \cdot \zeta^k \quad (8)$$

Похідні апроксимуючої функції (9)

$$\begin{aligned} i = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} &= 0; \quad i \geq 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=1}^{in} a_{ijk} \cdot i \cdot \xi^{i-1} \cdot \eta^j \cdot \zeta^k; \\ j = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= 0; \quad j \geq 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=1}^{jn} \sum_{i=0}^{in} a_{ijk} \cdot j \cdot \xi^i \cdot \eta^{j-1} \cdot \zeta^k; \\ k = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} &= 0; \quad k \geq 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = \sum_{k=1}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=0}^{in} a_{ijk} \cdot k \cdot \xi^i \cdot \eta^j \cdot \zeta^{k-1} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 i=0, 1, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = 0; \quad i \geq 2, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} &= \sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=2}^{in} a_{ijk} \cdot i \cdot (i-1) \cdot \xi^{i-2} \cdot \eta^j \cdot \zeta^k; \\
 j=0, 1, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0; \quad j \geq 2, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} &= \sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=2}^{jn} \sum_{i=0}^{in} a_{ijk} \cdot j \cdot (j-1) \cdot \xi^i \cdot \eta^{j-2} \cdot \zeta^k; \\
 j=0, 1, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} = 0; \quad j \geq 2, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} &= \sum_{k=2}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=0}^{in} a_{ijk} \cdot k \cdot (k-1) \cdot \xi^i \cdot \eta^j \cdot \zeta^{k-2};
 \end{aligned} \quad (10)$$

При підстановці (10) в рівняння математичної моделі (2) маємо (11)

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \Phi(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=0}^{in} \left(a_{ijk} \cdot (clx + cly + clz) \right) = \\
 &= kz^2 \cdot P(\xi, \eta, \zeta),
 \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\left\{ \begin{array}{ll} i < 2 & clx = 0; \\ j < 2 & cly = 0; \\ k < 2 & clz = 0; \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{ll} i \geq 2 & clx = i \cdot (i-1) \cdot \xi^{i-2} \cdot \eta^j \cdot \zeta^k \\ j \geq 2 & cly = j \cdot (j-1) \cdot \xi^i \cdot \eta^{j-2} \cdot \zeta^k \\ k \geq 2 & clz = k \cdot (k-1) \cdot \xi^i \cdot \eta^j \cdot \zeta^{k-2} \end{array} \right. \right\}$$

Середнє значення квадрата нев'язки для точок всередині області (12)

$$\delta = \frac{1}{mn} \sum_{m=1}^{mn} \left(\sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=0}^{in} \left(a_{ij} \cdot (clx + cly + clz) \right) - kz^2 \cdot P(\xi, \eta, \zeta) \right)^2, \quad (12)$$

де m – індекс внутрішньої точки зони.

Для задоволення умови (13) в кожній точці (x_{ms}, y_{ms}, z_{ms}) кордону S повинно виконуватися (13)

$$\Phi(\xi_{ms}, \eta_{ms}, \zeta_{ms}) = \sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=0}^{in} \left(a_{ijk} \cdot csf \right) = F(\xi_{ms}, \eta_{ms}, \zeta_{ms}), \quad (13)$$

де $csf = \xi^i \cdot \eta^j \cdot \zeta^k$

Середнє значення квадрата нев'язки для точок (x_{ms}, y_{ms}, z_{ms}) на кордоні S

$$\delta = \frac{1}{msn} \sum_{ms=1}^{msn} \left(\sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=0}^{in} \left(a_{ijk} \cdot csf \right) - F(\xi_{ms}, \eta_{ms}, \zeta_{ms}) \right)^2, \quad (14)$$

де ms – індекс точки на кордоні зони, де реалізується умова Діріхле.

Для задоволення умови (14) в кожній точці $(x_{msn}, y_{msn}, z_{msn})$ кордону S повинно виконуватися (15)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=0}^{in} \left[a_{ijk} \cdot (cfx \cdot \cos(\alpha) + cfy \cdot \cos(\beta) + cfz \cdot \cos(\gamma)) \right] = \quad (15)$$

$$= kz \cdot Fn(\xi_{msn}, \eta_{msn}, \zeta_{msn})$$

де $\left\{ \begin{array}{ll} i=0, & cfx=0; & i \geq 1, & cfx = i \cdot \xi^{i-1} \cdot \eta^j \cdot \zeta^k \\ j=0, & cfy=0; & j \geq 1, & cfy = j \cdot \xi^i \cdot \eta^{j-1} \cdot \zeta^k \\ k=0, & cfz=0; & k \geq 1, & cfz = k \cdot \xi^i \cdot \eta^j \cdot \zeta^{k-1} \end{array} \right\}$

(16) Середнє значення квадрата нев'язки для точок $(x_{msn}, y_{msn}, z_{msn})$ на кордоні S

$$\delta = \frac{1}{msnm} \sum_{msn=1}^{msnm} \left\{ \sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=0}^{in} \left[a_{ij} \cdot (cfx \cdot \cos(\alpha) + cfy \cdot \cos(\beta) + cfz \cdot \cos(\gamma)) \right] \right. \quad (16)$$

$$\left. kz \cdot Fn(\xi_{msn}, \eta_{msn}, \zeta_{msn}) \right\}^2.$$

По граничним умовам підсумовуються середні значення квадратів нев'язок (12), (14) і (16) з урахуванням міри впливу окремих складових. Подібний прийом дозволяє організувати більш гнучке управління процесом отримання рішення. Таким чином, вираження для функціоналу δ_{Σ} має вигляд (17)

$$\delta_{\Sigma} = \frac{1}{mn} \sum_{m=1}^{mn} \left(\sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=0}^{in} \left[a_{ijk} \cdot (clx + cly + clz) \right] - kz^2 \cdot P(\xi_m, \eta_m, \zeta_m) \right)^2 +$$

$$+ kf \cdot \frac{1}{msn} \sum_{ms=1}^{msn} \left(\sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=0}^{in} \left(a_{ijk} \cdot csf \right) - F(\xi_{ms}, \eta_{ms}, \zeta_{ms}) \right)^2 + \quad (17)$$

$$+ kn \cdot \frac{1}{msnm} \sum_{msn=1}^{msnm} \left\{ \sum_{k=0}^{kn} \sum_{j=0}^{jn} \sum_{i=0}^{in} \left[a_{ijk} \cdot (cfx \cdot \cos(\alpha) + cfy \cdot \cos(\beta) + cfz \cdot \cos(\gamma)) \right] - \right.$$

$$\left. - kz \cdot Fn(\xi_{msn}, \eta_{msn}, \zeta_{msn}) \right\}^2,$$

де kf, kn – вагові коефіцієнти впливу.

Надалі для зручності викладу використовується позначення

$$a_{ijk} = a_R$$

де $R = i+(i+1) \cdot j+(i+1) \cdot (j+1) \cdot k$ при $0 \leq i \leq in, \quad 0 \leq j \leq jn, \quad 0 \leq k \leq kn,$

$$0 \leq R \leq R_m, \quad R_m = R = in+(i+1) \cdot jn+(i+1) \cdot (jn+1) \cdot kn-1.$$

Отже вираження (17) придбає вигляд (18)

$$\begin{aligned} \delta_{\Sigma} = & \frac{1}{mn} \sum_{m=1}^{mn} \left\{ \sum_{R=0}^{R_m} [a_R \cdot (clx + cly + clz)] - kz^2 \cdot P(\xi_m, \eta_m, \zeta_m) \right\}^2 + \\ & + kf \cdot \frac{1}{msn} \sum_{ms=1}^{msn} \left\{ \sum_{R=0}^{R_m} [a_R \cdot csf] - F(\xi_{ms}, \eta_{ms}, \zeta_{ms}) \right\}^2 + \\ & + kn \cdot \frac{1}{msnm} \sum_{msn=1}^{msnm} \left\{ \sum_{R=0}^{R_m} [a_R \cdot (cfx \cdot \cos(\alpha) + cfy \cdot \cos(\beta) + cfz \cdot \cos(\gamma))] - \right. \\ & \left. - kz \cdot Fn(\xi_{msn}, \eta_{msn}, \zeta_{msn}) \right\}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Умови мінімуму для функціоналу δ_{Σ}

$$\frac{\partial \delta_{\Sigma}(R_0, R_1, R_2, \dots, R_m)}{\partial a_L} = 0, \quad 0 \leq L \leq R_m \quad a_L = a_{ijk}, \quad (19)$$

де $L = i+(in+1) \cdot j+(in+1) \cdot (jn+1) \cdot k$ при $0 \leq i \leq in, \quad 0 \leq j \leq jn, \quad 0 \leq k \leq kn$.

Таким чином, створюється система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) порядку R_m , кожне з яких має вигляд

$$\begin{aligned} \sum_{R=1}^{R_{max}} a_R \cdot \left\{ \frac{1}{mn} \sum_{m=1}^{mn} [(clx + cly + clz)|_R \cdot (clx + cly + clz)|_L] + \frac{kf}{msn} \cdot \sum_{ms=1}^{msn} [csf|_R \cdot csf|_L] + \right. \\ \left. + \frac{kn}{msnm} \cdot \sum_{msn=1}^{msnm} \left[(cfx \cdot \cos(\alpha) + cfy \cdot \cos(\beta) + cfz \cdot \cos(\gamma))|_R \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot (cfx \cdot \cos(\alpha) + cfy \cdot \cos(\beta) + cfz \cdot \cos(\gamma))|_L \right] \right\} = \\ = \frac{kz^2}{mn} \cdot \sum_{m=1}^{mn} [P(\xi_m, \eta_m, \zeta_m) \cdot (clx + cly + clz)|_L] + \frac{kf}{msn} \cdot \sum_{ms=1}^{msn} [F(\xi_{ms}, \eta_{ms}, \zeta_{ms}) \cdot csf|_L] + \\ + \frac{kn \cdot kz}{msnm} \cdot \sum_{msn=1}^{msnm} [Fn(\xi_{msn}, \eta_{msn}, \zeta_{msn}) \cdot (cfx \cdot \cos(\alpha) + cfy \cdot \cos(\beta) + cfz \cdot \cos(\gamma))|_L]. \end{aligned} \quad (20)$$

Використовуючи позначення R – індекс стовпця матриці, L – індекс рядка матриці, отримаємо вираження для коефіцієнтів матриці і вектору правих частин СЛАР. Із рішення СЛАР можна визначити значення коефіцієнтів апроксимуючої функції. Особливо потрібно відмітити можливість посилення впливу окремих (найбільш значущих) граничних умов. Розрахункові формули

- для коефіцієнтів матриці (21)

$$\begin{aligned} A(L, R) = & \frac{1}{mn} \sum_{m=1}^{mn} [(clx + cly + clz)|_R \cdot (clx + cly + clz)|_L] + \\ & + \frac{kf}{msn} \cdot \sum_{ms=1}^{msn} [csf|_R \cdot csf|_L] + \\ & + \frac{kn}{msnm} \cdot \sum_{msn=1}^{msnm} \left[(cfx \cdot \cos(\alpha) + cfy \cdot \cos(\beta) + cfz \cdot \cos(\gamma))|_R \cdot \right. \\ & \left. \cdot (cfx \cdot \cos(\alpha) + cfy \cdot \cos(\beta) + cfz \cdot \cos(\gamma))|_L \right] \end{aligned} \quad (21)$$

- для елементів вектору правої частини (22).

$$\begin{aligned}
 B(L) = & \frac{kz^2}{mn} \cdot \sum_{m=1}^{mn} \left[P(\xi_m, \eta_m, \zeta_m) \cdot (clx + cly + clz) \Big|_L \right] + \\
 & + \frac{kf}{msn} \cdot \sum_{ms=1}^{msn} \left[F(\xi_{ms}, \eta_{ms}, \zeta_{ms}) \cdot csf \Big|_L \right] + \frac{kn \cdot kz}{msnm} \cdot \\
 & \cdot \sum_{msn=1}^{msnm} \left[F_n(\xi_{msn}, \eta_{msn}, \zeta_{msn}) \cdot (cfx \cdot \cos(\alpha) + cfy \cdot \cos(\beta) + cfz \cdot \cos(\gamma)) \Big|_L \right]. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Зшивання рішень отриманих у локальних зонах. Відповідно до особливостей методики, вся область розбивається на кінцеву кількість зон, в яких шукають рішення при умові зшивки рішень по кордонах зон.

З областю визначення рішення зв'язується глобальна система координат x, y, z . З кожною із зон зв'язується локальна система відносних координат з осями ξ, η, ζ , що орієнтовані паралельно осям, відповідно x, y, z (рис. 1).

Призначається декілька типових (базових) видів зон зі своїми локальними координатними системами ξ, η, ζ . Форма зони, розташування початку локальних координат і розміщення вузлових точок (в яких відбувається мінімізація суми квадратів нев'язок) в достатній мірі довільні.

З кожною з локальних областей (ЛО) зв'язується локальна система відносних координат з осями x, y, z , найчастіше, орієнтованими паралельно осям відповідно X, Y, Z . Призначається кілька типових (базових) видів локальних областей зі своїми локальними координатними системами xnz, ynz, znz . Форма локальної області, розташування початку локальних координат та розміщення вузлових точок всередині локальної області достатньо довільні. Але, при зшиванні, рішень в ЛВ глобальні координати точок зшивання рішень повинні збігатися (рис. 2).

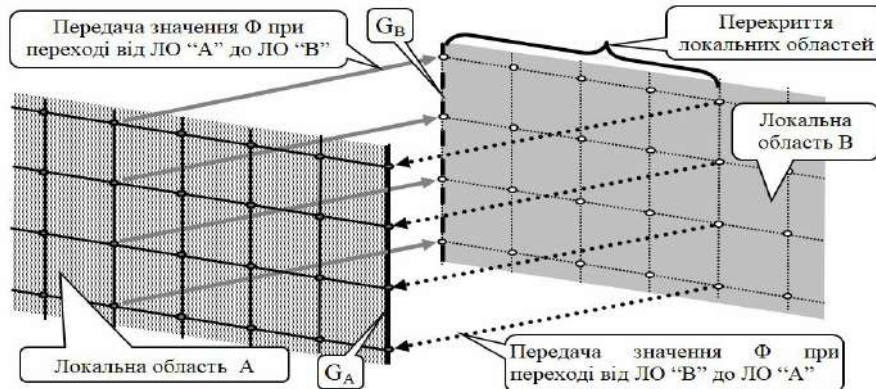


Рис. 2. Схема зшивки рішень у локальних областях

Джерело: Власна розробка авторів (Source: Own elaboration)

Зшивання рішень проводиться ітераційним способом.

Тестові дослідження. Для оцінки ефективності методики, що пропонується, проводилося рішення контрольних задач, що мають аналітичне рішення. Перші три задачі орієнтувалися на рішення рівняння Пуассона для областей, що мають на всіх кордонах умову Діріхле (рис. 3).

$$\nabla^2 F = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F = -1. \quad (23)$$

де $F(s) = 0$, s – кордон області.

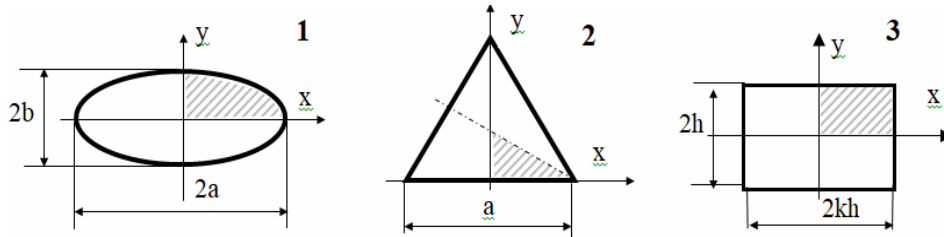


Рис. 3. Области рішення для контрольних задач № 1, 2, 3

Джерело: Власна розробка авторів (Source: Own elaboration)

Аналітичні рішення.

Задача 1 – еліптична форма області

$$F = \frac{a^2 \cdot b^2}{2(a^2 + b^2)} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Задача 2 – трикутна форма області (рівносторонній трикутник) рішення

$$F = \frac{1}{2\sqrt{3} \cdot a} \cdot y \cdot \left(y - \sqrt{3} \cdot x - \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(y + \sqrt{3} \cdot x - \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \right)$$

Задача 3 – прямокутна форма області

$$F = \frac{16 \cdot k^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{ch \left(\frac{(2n+1) \cdot \pi \cdot y}{2 \cdot k \cdot h} \right)}{ch \left(\frac{(2n+1) \cdot \pi}{2 \cdot k} \right)} \right] \cdot \cos \left(\frac{(2n+1) \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot k \cdot h} \right)$$

При рішенні задач розглядалися (з урахуванням симетричності областей визначення функції) виділені частини областей, як показано на схемах.

Особливість рішення першої і другої задачі бралася так, що виділені частини областей відбивалися однією двовимірною зоною, а шукане рішення апроксимується функцією типу (2) від параметрів ξ, η .

Приймалися значення:

- перша задача $in = 2, jn = 2$;
- друга задача $in = 3, jn = 3$.

Оскільки апроксимуюча функція в першій задачі повністю відповідала аналітичному рішення, то, як і очікувалося, чисельне і аналітичне рішення співпадали з точністю до 7-го знаку. Погрішність чисельного рішення другої задачі не перевищувала 0,01 %.

При рішенні третьої задачі вся виділена частина області відбивалася двома зонами. Використовувалася та ж апроксимуюча функція з параметрами: $in = 3$, $jn = 3$. На кордоні зон проводилася ітераційна зшивка рішень по значеннях першої похідної і функції. Погрішність чисельного рішення третьої задачі не перевищувала 0,05 %.

Для більш детальної перевірки проводилося рішення четвертої задачі.

$$\nabla^2 F = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F = 0; \quad y = 0, \quad F = 0; \quad \text{на кордоні кола } F = 1. \quad (24)$$

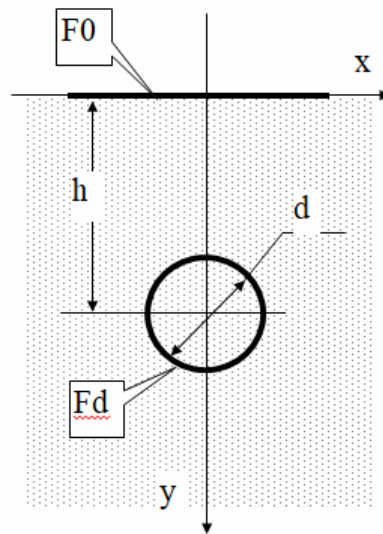


Рис. 4. Область рішення для задачі № 4

Джерело: Власна розробка авторів (Source: Own elaboration)

Аналітичне рішення

$$F = \frac{\ln \left(\frac{x^2 + \left(y + \sqrt{h^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2} \right)^2}{x^2 + \left(y - \sqrt{h^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2} \right)^2} \right)}{2 \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot h}{d} + \sqrt{\left(\frac{2 \cdot h}{d} \right)^2 - 1} \right)}$$

У випадку, що розглядається, використовувалася система зон, яка показана на рис. 5.

Рішення проводилося в наступній послідовності: передусім визначалося попереднє рішення в зоні № 0. Потім, використовуючи отримане рішення в зоні № 0, було уточнено рішення в зонах № 1-№ 3. При цьому проводилася ітераційна зшивка рішень у зонах.

Наступний етап – уточнення рішення в зоні № 0. Ітераційна зшивка рішень проводилася на кордоні, що вказано на рис. 3 а і рис. 3 б пунктирною лінією.

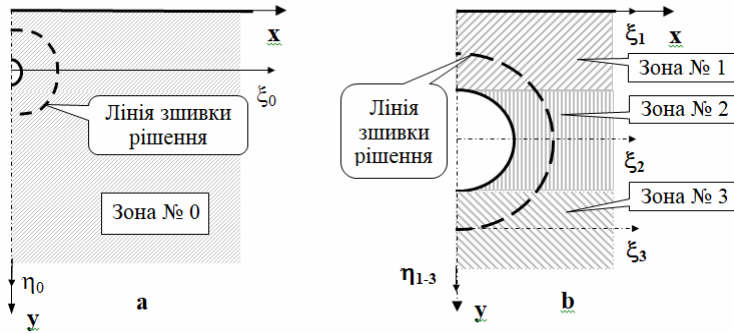


Рис. 5. Схема розбиття області на зони

Джерело: Власна розробка авторів (Source: Own elaboration)

Використовувалася апроксимуюча функція (8) з параметрами: $i_n = 3$, $j_n = 3$. На кордоні зон проводилася ітераційна зшивка рішень по значеннях першої похідної і функції.

Внаслідок виконання обумовлених етапів декілька разів отримане остаточне рішення (рис. 6) з погрішністю не більше за 0,4 %.

Для отримання більш точного рішення використовувалася та ж апроксимуюча функція з параметрами: $i_n = 4$, $j_n = 4$, що дозволило знизити погрішність рішення до рівня 0,05 %.

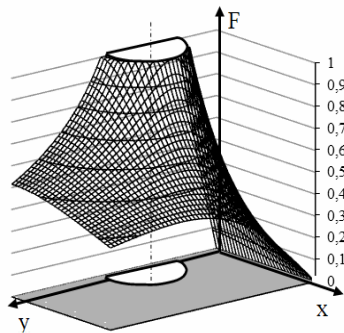


Рис. 6. Вигляд рішення задачі № 4

Джерело: Власна розробка авторів (Source: Own elaboration)

Використання методик, що пропонуються, не обмежується задачами тепло-техніки. Досить актуальним є дослідження процесів коливання суден з малим зануренням на глибокій воді.

Вдалим виявилось застосування обумовленого підходу для рішення задачі качання корабля – визначення гідродинамічних коефіцієнтів: приєднаної маси і демпфірування.

Гідродинамічні коефіцієнти коливання судна визначаються за результатами рішення систем диференціальних рівнянь в приватних похідних з відповідними крайовими умовами першого або другого роду. У деяких специфічних випадках, для замикання математичної моделі використовуються відповідні диференціальні і алгебраїчні рівняння.

Розглядається задача генерації хвиль у важкій ідеальній рідині, що викликані гармонійними коливаннями корпусу судна будь-якої конфігурації. Обговорюється, що амплітуда генерованих хвиль і переміщення корпусу щодо незбуреної поверхні порівнянні з зануренням. Хвилі поширюються в нескінченному напівпросторі без відбиття й поглинання.

У загальному випадку навколо тіла, що коливається, виділяється розрахункова область, що обмежена цим тілом, вільною поверхнею й віртуальними (умовними) границями.

При організації тестового рішення розглядаються коливання прямокутного контуру у вертикальному напрямі (рис. 7).

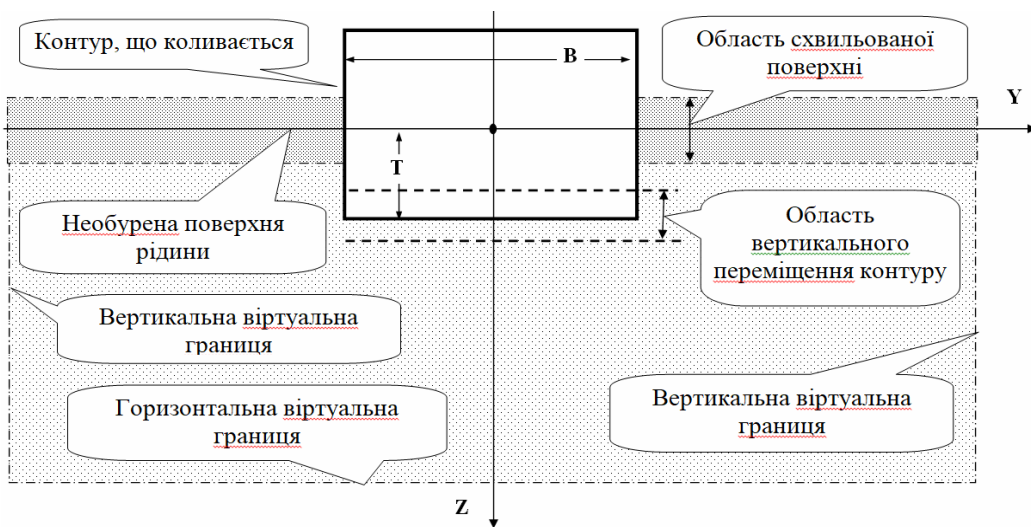


Рис. 7. Схема області дослідження при моделюванні вертикальних коливань корпусу в рідині

Джерело: Власна розробка авторів (Source: Own elaboration)

Розглядалося судно без ходу на тихій глибокій воді, що здійснює вертикальні гармонічні коливання з одиничною амплітудою швидкості $v(t) = \cos(\sigma t)$. Рідина вважається ідеальною і нестискуємою, а її рішення потенційним. На вільній поверхні рідини прийняті допущення про малі обурення.

Корпус судна приймається «плоским», а площина, дотична до поверхні корпусу, складає малий кут з площиною ватерлінії $z = 0$.

Як математична модель, прийнята система рівнянь (25)-(28).

В області поза корпусом (25)

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (25)$$

де Φ – скалярний потенціал поля швидкості;

y, z – координатні осі.

На вільній поверхні ($z = 0$), що коливається, реалізуються умови (26), (27)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] - g \cdot h = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (27)$$

де h – відхилення поверхні рідини від положення рівноваги;

τ – час.

Умова на нижній (горизонтальній) віртуальній межі розрахункової області відбиває хитавицю на глибокій воді. У цьому випадку зазвичай використовується умова (28)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \text{grad } \Phi = 0. \quad (28)$$

На днищі та на бічній поверхні корпусу, відповідно, задавалися граничні умови (29)

$$\frac{d\Phi}{dz} = a \cdot \cos(b \cdot \tau), \quad \frac{d\Phi}{dy} = 0, \quad (29)$$

На вертикальних віртуальних кордонах задавалися невідображаючі граничні умови.

Розрахунок полів потенціалу здійснюється локально-проекційним методом, що був описаний раніше. Проекційне рішення кожної підобласті апроксимується функцією $\Phi(y, z)$, яка нерозривна і має нерозривні приватні похідні першого і другого порядку (30)

$$\Phi = \sum_{j=0}^{j_{\max}} \sum_{i=0}^{i_{\max}} a_{ij} \cdot x^i \cdot z^j, \quad (30)$$

Визначення величин коефіцієнтів a_{ijk} здійснюється з умови мінімізації середньоквадратичних значень нев'язки (як для диференціальних рівнянь, так і для граничних умов, або умов зшивки рішення на кордонах зон), що обчислено по всіх точках зони.

На рис. 8 наведено поля швидкості для деяких моментів часу.

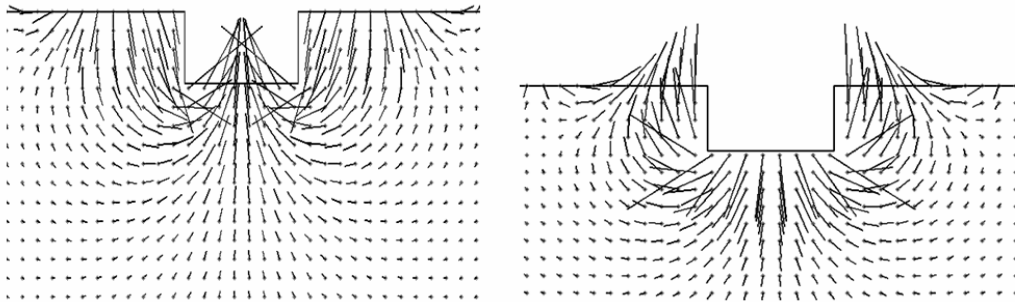


Рис. 8. Поля швидкості в різні моменти часу

Джерело: Власна розробка авторів (Source: Own elaboration)

Для оцінки спроможності методики проводилося контрольне рішення плоскої задачі для прямокутного шпангоутного контуру з відношенням ширини до осідання $B/T = 4$. Коефіцієнт приєднаної маси λ і коефіцієнт демпфування μ розраховувалися чисельним методом за наслідками обчислювального експерименту. Порівняння проводилося з результатами експерименту [22]. Відхилення не перевищували 8 %.

Висновки. Описаний локально-проекційний метод розв'язання задач кондуктивного переносу може використовуватися для дослідження стаціонарних процесів дифузії та фільтраційних течій і для дослідження полів температури в об'єктах складної структури.

Метод спрямовано на системи розподілених обчислень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов В.В. Методи обчислень: конспект лекцій для студентів механіко-математичного факультету / В.В. Попов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. – 303 с.
2. Веселовський В.Б., Дреус А.Ю., Сяєв А.В. Математичне моделювання та методи розрахунку теплотехнологічних процесів: Навч. посібник. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 248 с.
3. Chu H.-P., Chen C.-L. Hybrid differential transform and finite difference method to solve the nonlinear heat conduction problem // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2008. – Vol. 13. № 8. – P. 1605-1614.
4. Toghaw P. Numerical experiments using hierarchical finite element method for nonlinear heat conduction in plates / H. Kaneko, K. S. Bey, Y. Lenbury, P. Toghaw // *Applied Mathematics and Computation*. – 2008. – Vol. 201. №. 1-2. – P. 414-430.

5. Lcrcher F., Gassner G., Munz C.-D. *An explicit discontinuous galerkin scheme with local time-stepping for general unsteady diffusion equations // Journal of Computational Physics.* – 2008. – Vol. 227. № 11. – P. 5649-5670.
6. Christou M., Sophocleous C., Christov C. *Numerical investigation of the nonlinear heat diffusion equation with high nonlinearity on the boundary // Applied Mathematics and Computation.* – 2008. – Vol. 201. № 1-2. – P. 729-738.
7. Cattaneo P.M. *The Finite Element Method: a Tool to Study Orthodontic ToothMovement / P.M. Cattaneo, M. Dalstra, B. Melsen // J Dent Res.* – 2005. – Vol. 84(5). – P. 428-433.
8. Chapko R. *An alternating boundary integral based method for a Cauchy problem for the Laplace equation in a quadrant/ R. Chapko, B.T. Johansson // Inverse Problems in Science and Engineering.* – 2009. – 17. – P. 871-883.
9. Chapko R. *On some iterative methods based on boundary integrals for elliptic Cauchy problems in semi-infinite domains / R. Chapko, B. T Johansson // Electronic Journal of Boundary Elements.* – 2009. – 7. – P.1-12.
10. Mochurad L.I. *Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis / L.I. Mochurad, Y.S. Harasym, B.A. Ostudin // International Journal of Computing.* – 2009. – Vol. 8. – № 2. – P. 149-156.
11. Guo Ben-Yu, Shen Jie. *Laguerre-Galerkin method for nonlinear partial differential equations on a semi-infinite interval // Numer. Math., 2000, V. 86. № 4. – P. 635-654.*
12. Christou M., Sophocleous C., Christov C. *Numerical investigation of the nonlinear heat diffusion equation with high nonlinearity on the boundary // Applied Mathematics and Computation, 2008. – Vol. 201. 1-2. – P. 729-738.*
13. Lcrcher F., Gassner G., Munz C.-D. *An explicit discontinuous galerkin scheme with local time-stepping for general unsteady diffusion equations // Journal of Computational Physics, 2008. – Vol. 227. № 11. – P. 5649-5670.*
14. Nazirov, S. A. *Study of Numeric Convergence of the Method of R-functions in Problems of Constraint Torsion [Text] / S.A. Nazirov, F.M. Nuraliev, S.A. Anorova // American Journal of Computational and Applied Mathematics, 2012. – Vol. 2. № 4. – P. 189-196.*
15. Овчаренко В.А., Подлесний С.В., Зінченко С.М. *Основи методу кінцевих елементів і його застосування в інженерних розрахунках: Навч. посібник. – Краматорськ: ДДМА, 2008. – 380 с.*
16. Меркт Р.В. *Обчислювальний експеримент. Динаміка систем / Р.В. Меркт, В.В. Челабчі, В.М. Челабчі, І.А. Кукішев // Вісник Одеського національного морського університету: Зб. наук. праць. – Одеса: ОНМУ, 2014. – № 1(40). – С. 214-227.*

17. Chelabchy V.V. *Adapting of methods of asolution of applied problems to the distributed calculations.* / V.V. Chelabchy // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»: Зб. наук. Праць: Тематичний випуск «Системний аналіз, управління та інформаційні технології», – Харків: НТУ«ХПИ», 2004. № 1. – С. 15-23.
18. Застосування методу граничних елементів для розрахунку корабельних хвиль / В.О. Горбань, І.М. Горбань, С.В. Масюк, В.І. Нікішов // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – Т. 13. № 4. – С. 22-29.
19. Горбань В.О., Масюк С.В. Чисельне моделювання гідродинамічної взаємодії тіл, що рухаються в рідині // Прикладна гідромеханіка. – 2006. – 8 (80). № 3. – С. 27-49.
20. Новак С.І., Челабчі В.В. Адаптація чисельних методів до розподілених обчислювань / Тези доповідей науково-практичної конференції «Інформаційні управляючі системи та технології». – Суми: Друкарський дім «Панірус». – 2012. – С. 161-163.
21. Vughts J.H. *The hydrodynamic coefficients for swaying, heaving and rolling cylinders in a free surface* // *International Shipbuilding Progress.* – 1968. – V.15. № 167. – P. 251-276.
22. Samarskyi A.A., Vabyshchevych P.N. *Mathematical modeling and computational experiment.* M.: YMM RAN, 2000. – 409 p.
23. Slettery J.S. *Theory of transfer of momentum, energy and mass in continuous media.* M.: Enerhyia, 1978. – 448 p.
24. Samarskyi A.A., Tykhonov A.A. *Equations of mathematical physics.* M.: Yzd-vo MHU, 2004. – 798 p.
25. Chu H.-P., Chen C.L. *Hybrid differential transform and finite difference method to solve the nonlinear heat conduction problem* // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* Vol. 13. № 8. 2008. P. 1605-1614.
26. Kaneko H., Bey K., Lenbury SY.P., Toghaw P. *Numerical experiments using hierarchical finite element method for nonlinear heat conduction in plates* // *Applied Mathematics and Computation.* – 2008. – Vol. 201. № 1-2. – P. 414-430.
27. Lcrcher F., Gassner G., Munz C.-D. *An explicit discontinuous galerkin scheme with local time-stepping for general unsteady diffusion equations* // *Journal of Computational Physics.* Vol. 227. № 11. 2008. – P. 5649-5670.
28. Christou M., Sophocleous C., Christov C. *Numerical investigation of the nonlinear heat diffusion equation with high nonlinearity on the boundary* // *Applied Mathematics and Computation.* Vol. 201, № 1-2. 2008. – P. 729-738.
29. Cattaneo P.M., Dalstra M., Melsen B. *The Finite Element Method: a Tool to Study Orthodontic Tooth Movement.* Vol. 84(5). 2005. – P. 428-433.
30. Chapko R., Johansson B.T. *An alternating boundary integral based method for a Cauchy problem for the Laplace equation in a quadrant* // *Inverse Problems in Science and Engineering.* 17. 2009. – P. 871-883.

31. Chapko R., Johansson B.T. *On some iterative methods based on boundary integrals for elliptic Cauchy problems in semi-infinite domains // Electronic Journal of Boundary Elements. 7. 2009. – P.1-12.*
32. Mochurad L.I., Harasym S.B., Ostudin Y.A. *Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis // International Journal of Computing. Vol. 8. № 2, 2009. – P. 149-156.*
33. Guo Ben, Yu, Shen Jie. *Laguerre-Galerkin method for nonlinear partial differential equations on a semi-infinite interval // Numer. Math. Vol. 86. № 4, 2000. – P. 635-654.*
34. Christou M., Sophocleous C., Christov C. *Numerical investigation of the nonlinear heat diffusion equation with high nonlinearity on the boundary // Applied Mathematics and Computation. Vol. 201. № 1-2, 2008. – P. 729-738.*
35. Lcrcher F. Gassner G., Munz C.D. *An explicit discontinuous galerkin scheme with local time-stepping for general unsteady diffusion equations // Journal of Computational Physics. Vol. 227. № 11, 2008. – P. 5649-5670.*
36. Nazirov, S.A., Nuraliev F.M., Anorova S.A. *Study of Numeric Convergence of the Method of R-functions in Problems of Constraint Torsion // American Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 2. № 4. 2012. P. 189-196.*
37. Marchuk H.Y., Ahoshkov V.Y. *Introduction to projection-grid methods. M.: Nauka, 1981. – 416 p.*
38. Kukyshev Y.A. *Using the projection-grid method in distributed computing / И.А. Кукушев // Sbornyk nauchnykh trudov Sword. Vol. 2. T 6. Odesa: KUPRYENKO, 2013. – P. 24-28.*
39. Chelabchy V.V. *Adapting of methods of a solution of applied problems to the distributed calculations // Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «Kharkivskiyi politekhnichnyi instytut»: Zb. Nauk. Prats. Tematychnyi vypusk «Systemnyi analiz, upravlinnia ta informatsiini tekhnolohii». – Kharkiv: NTU«KhPI», 2004. № 4. – P. 15-23.*
40. Chelabchy V.V. *Organization of distributed computing in problems of wave hydromechanics // Sb. nauchnykh trudov po materyalam nauchno-praktycheskoi konferentsyy «Sovremennye problemy y puty ykh resheniya v nauke, transporte, proyzvodstve y obrazovanyy», T. 12. Odesa: Chernomore, 2005. – P.41-44.*
41. Chelabchy V.V. *Modeling the rolling of shallow draft vessels in deep water // Sb. nauchnykh trudov mezhdunarodnoi nauchno-praktycheskoi konferentsyy «Sovremennye problemy y puty ykh resheniya nauke, transporte, proyzvodstve y obrazovanyy '2009», T. 22. Odesa: Chernomore, 2009. – P.17-20.*
42. Novak S.I., Chelabchy V.V. *Adaptation of numerical methods to distributed computing // Tezy dopovidei naukovo-praktychnoi konferentsii «Informatsiini upravliaiuchi systemy ta tekhnolohii». Sumy: Drukarskyi dim «Papyrus», 2012. – P. 161-163.*

REFERENCES

1. Popov V.V. *Calculation methods: a summary of lectures for students of the Faculty of Mechanics and Mathematics*. – K.: Vydavnycho-polihrafichnyi tsentr «Kyivskiy universytet» 2012. – 303 p.
2. Klymenko A.V., Zorina V.M. *Theoretical foundations of heat engineering. Thermal engineering experiment: Handbook, MEI*, – 2001.
3. Veselovskiy V.B, Dreus A.Yu., Siasiev A.V. *Mathematical modeling and calculation methods of heat-technological processes: Training manual*. – D.: Vyd-vo Dnipropetr. un-tu, 2004. – 248 p.
4. Chu H.-P., Chen C.-L. *Hybrid differential transform and finite difference method to solve the nonlinear heat conduction problem // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2008. – Vol. 13. № 8. – P. 1605-1614.
5. Toghaw P. Kaneko H., Bey K.S., Lenbury Y. *Numerical experiments using hierarchical finite element method for nonlinear heat conduction in plates // Applied Mathematics and Computation*. – 2008. – Vol. 201. № 1-2. – P. 414-430.
6. Lcrcher F., Gassner G., Munz C.-D. *An explicit discontinuous galerkin scheme with local time-stepping for general unsteady diffusion equations // Journal of Computational Physics*. – 2008. – Vol. 227. № 11. – P. 5649-5670.
7. Christou M., Sophocleous C., Christov C. *Numerical investigation of the nonlinear heat diffusion equation with high nonlinearity on the boundary // Applied Mathematics and Computation*. – 2008. – Vol. 201. № 1-2. – P. 729-738.
8. Cattaneo P.M. Dalstra M., Melsen B. *The Finite Element Method: a Tool to Study Orthodontic Tooth Movement // J Dent Res*. – 2005. – Vol. 84(5). – P. 428-433.
9. Chapko R., Johansson R. *An alternating boundary integral based method for a Cauchy problem for the Laplace equation in a quadrant // Inverse Problems in Science and Engineering*. – 2009. – 17. – P. 871-883.
10. Chapko R., Johansson R. *On some iterative methods based on boundary integrals for elliptic Cauchy problems in semi-infinite domains // Electronic Journal of Boundary Elements*. – 2009. – 7. – P.1-12.
11. Mochurad L.I. Harasym Y.S., Ostudin B.A. *Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis // International Journal of Computing*. – 2009. – Vol. 8. – № 2. – P. 149-156.
12. Guo Ben-Yu, Shen Jie. *Laguerre-Galerkin method for nonlinear partial differential equations on a semi-infinite interval // Numer. Math.* 2000. Vol. 86. № 4. – P. 635-654.

13. Christou M., Sophocleous C., Christov C. Gassner Munz C.-D. Numerical investigation of the nonlinear heat diffusion equation with high nonlinearity on the boundary // *Applied Mathematics and Computation*. – 2008. – Vol. 201. № 1-2. – P. 729-738.
14. Lercher F., Nuraliev G., An explicit discontinuous galerkin scheme with local time-stepping for general unsteady diffusion equations // *Journal of Computational Physics*. – 2008. – Vol. 227. № 11. – P. 5649-5670.
15. Nazirov, S.A., Anorova S.A. Study of Numeric Convergence of the Method of R-functions in Problems of Constraint Torsion [Text] // *American Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2012. – Vol.2. № 4.– P. 189-196.
16. Ovcharenko V.A., Podliesnyi S.V., Zinchenko S.M. Fundamentals of the finite element method and its application in engineering calculations: Study guide. – Kramatorsk:DDMA, 2008. – 380 p.
17. Merkt R.V., Chelabchi V.V., Chelabchi V.M., Kukishev I.A. Computational experiment. Dynamics of systems // *Visnyk Odeskoho natsionalnoho morskoho universytetu: Zbirnyk naukovykh prats*. – Odesa: ONMU, 2014. – № 1(40). – P. 214-227.
18. ChelabchyV.V. Adapting of methods of asolution of applied problems to the distributed calculations. // *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «Kharkivskiy politekhnichnyi instytut»: Zbirnyk naukovykh prats, Tematychnyi vypusk «Systemnyi analiz, upravlinnia ta informatsiini tekhnolohii», – Kharkiv: NTU«KhPI», – 2004, №1. – P. 15-23.*
19. Horban V.O., Horban I.M., Masiuk S.V., Nikishov V.I. Application of the boundary element method for the calculation of ship waves // *Prykladna hidromekhanika*. – 2011. – T. 13, № 4. – P. 22-29.
20. Horban V.O., Masiuk S.V. Numerical modeling of the hydrodynamic interaction of bodies moving in a liquid // *Prykladna hidromekhanika*. – 2006. – 8 (80), No 3. – P. 27-49.
21. Novak S.I., Chelabchi V.V. Adaptation of numerical methods to distributed computing / *Tezy dopovidei naukovo-praktychnoi konferentsii «Informatsiini upravliaiuchi systemy ta tekhnolohii»*. – Sumy.: Drukarskyi dim «Papirus». – 2012. – P. 161-163.
22. Vugts J.H. The hydrodynamic coefficients for swaying, heaving and rolling cylinders in a free surface // *International Shipbuilding Progress*. – 1968. – V.15.N 167. – P. 251-276.
23. Samarskyi A.A., Vabyshchevych P.N. Mathematical modeling and computational experiment. M.: YMM RAN, 2000. – 409 p.
24. Slettery J.S. Theory of transfer of momentum, energy and mass in continuous media. M.: Enerhyia, 1978. – 448 p.
25. Samarskyi A.A., Tykhonov A.A. Equations of mathematical physics. M.: Yzdvo MHU, 2004. – 798 p.

26. Chu H.-P., Chen C.L. Hybrid differential transform and finite difference method to solve the nonlinear heat conduction problem // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 13, no. 8, 2008. – P. 1605-1614.
27. Kaneko H., Bey K., Lenbury S.Y.P., Toghaw P. Numerical experiments using hierarchical finite element method for nonlinear heat conduction in plates // *Applied Mathematics and Computation*. – 2008. – Vol. 201, No. 1-2. – P. 414-430.
28. Lcrcher F., Gassner G., Munz C.-D. An explicit discontinuous galerkin scheme with local time-stepping for general unsteady diffusion equations // *Journal of Computational Physics*, vol. 227, no. 11, 2008. – P. 5649-5670.
29. Christou M., Sophocleous C., Christov C. Numerical investigation of the nonlinear heat diffusion equation with high nonlinearity on the boundary // *Applied Mathematics and Computation*, vol. 201, no. 1-2, 2008. – P. 729-738.
30. Cattaneo P.M., Dalstra M., Melsen B. *The Finite Element Method: a Tool to Study Orthodontic Tooth Movement*, vol. 84(5), 2005. – P. 428-433.
31. Chapko R., Johansson B.T. An alternating boundary integral based method for a Cauchy problem for the Laplace equation in a quadrant // *Inverse Problems in Science and Engineering*, 17, 2009. – P. 871-883.
32. Chapko R., Johansson B.T. On some iterative methods based on boundary integrals for elliptic Cauchy problems in semi-infinite domains // *Electronic Journal of Boundary Elements*, 7, 2009. – P.1-12.
33. Mochurad L. I., Harasym S. B., Ostudin Y.A. Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis // *International Journal of Computing*, vol. 8, no 2, 2009. – P. 149-156.
34. Guo Ben, Yu, Shen Jie. Laguerre-Galerkin method for nonlinear partial differential equations on a semi-infinite interval // *Numer. Math*, vol. 86, no. 4, 2000. – P. 635-654.
35. Christou M., Sophocleous C., Christov C. Numerical investigation of the nonlinear heat diffusion equation with high nonlinearity on the boundary // *Applied Mathematics and Computation*, vol. 201, no. 1-2, 2008. – P. 729-738.
36. Lcrcher F. Gassner G., Munz C.D. An explicit discontinuous galerkin scheme with local time-stepping for general unsteady diffusion equations // *Journal of Computational Physics*, vol. 227, no. 11, 2008. – P. 5649-5670.
37. Nazirov, S. A., Nuraliev F.M., Anorova S.A. Study of Numeric Convergence of the Method of R-functions in Problems of Constraint Torsion // *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 2, no 4, 2012. – P. 189-196.
38. Marchuk H.Y., Ahoshkov V.Y. *Introduction to projection-grid methods*. M.: Nauka, 1981. – 416 p.
39. Kukyshev Y.A. Using the projection-grid method in distributed computing // *И.А. Кукушев // Сборник научных трудов Sword*, vol. 2, Т 6. Odessa: KUPRYENKO, 2013. – P. 24-28.

40. Chelabchy V.V. *Adapting of methods of a solution of applied problems to the distributed calculations. // Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «Kharkivskiy politekhnichnyi instytut»: Zbirnyk naukovykh prats, Tematychnyi vypusk «Systemnyi analiz, upravlinnia ta informatsiini tekhnolohii», – Kharkiv: NTU«KhPI», no 4, – 2004. – P. 15-23.*
41. Chelabchy V.V. *Organization of distributed computing in problems of wave hydromechanics // Sb. nauchnykh trudov po materiyalam nauchno-praktycheskoi konferentsyy «Sovremennye problemy u puty ykh resheniya v nauke, transporte, proyzvodstve y obrazovanny», T. 12. Odessa:Chernomore, 2005. – P.41-44.*
42. Chelabchy V.V. *Modeling the rolling of shallow draft vessels in deep water // Sb. nauchnykh trudov mezhdunarodnoi nauchno-praktycheskoi konferentsyy «Sovremennye problemy u puty ykh resheniya nauke, transporte, proyzvodstve y obrazovanny '2009», T. 22. Odessa: Chernomore, 2009. – P. 17-20.*
43. Novak S.I., Chelabchy V.V. *Adaptation of numerical methods to distributed computing // Tezy dopovidei naukovo-praktychnoi konferentsii «Informatsiini upravliaiuchi systemy ta tekhnolohii». Sumy.: Drukarskyi dim «Papyrus», 2012. – P. 161-163.*

Стаття надійшла до редакції 20.03.2023

Посилання на статтю: Челабчі В.М., Тузова І.А., Панченко Т.Д., Стародуб В.І., Тузов О.В., Челабчі В.В. Проекційний метод моделювання кондуктивного переносу // Вісник Одеського національного морського університету: Зб. наук. праць, 2023. № 3 (70). С. 143-164. DOI 10.47049/ 2226-1893-2023-3-143-164.

Article received 20.03.2023

Reference a journalartic: Chelabchi V., Tuzova I., Panchenko T., Starodub V., Tuzov O., Chelabchi V. Projection method for simulation of conductive transfer // Herald of the Odessa national maritime university. Coll. scient. works, 2023. № 3 (70). P. 143-164. DOI 10.47049/ 2226-1893-2023-3-143-164.