

УДК 620.178.3:519.6

DOI 10.47049/2226-1893-2023-4-87-95

**СПОСІБ ПЕРЕРАХУНКУ ПАРАМЕТРІВ
ДВОХ МОДЕЛЕЙ КРИВОЇ ВТОМИ**

А.В. Конопльов

д.т.н., професор, завідувач кафедри «Машинознавство та інженерна механіка»

Ю.О. Григор'єв

к.ф.-м.н., доцент кафедри «Математика, фізика та астрономія»

В.В. Галевський

ст. викладач кафедри «Машинознавство та інженерна механіка»

Одеський національний морський університет, Одеса, Україна

Анотація. Розглянуто проблему, пов'язану з перерахунком параметрів степеневого рівняння кривої втоми до параметрів рівняння Вейбула. Проведено аналіз одного з існуючих методів, який ґрунтується на ряді припущень і тому має невисоку точність.

Наголошено, що розвиток цього напрямку є актуальним, оскільки розширює можливості проведення порівняльного аналізу експериментальних даних, опублікованих у літературних джерелах. Крім того, перерахунок параметрів кривої втоми дозволяє проводити екстраполяцію кривої втоми в область великих довговічностей. У статті запропоновано аналітичний підхід до перерахунку параметрів степеневого рівняння до параметрів рівняння Вейбула. Обчислення проводились в системі комп'ютерної математики «wxMaxima». Практичні розрахунки були проведені стосовно результатів випробувань зразків чотирьох типів, виготовлених з конструкційних марок, сталі.

Ключові слова: криві втоми, границя витривалості, перерахунок параметрів кривих втоми.

UDC 620.178.3:519.6

DOI 10.47049/2226-1893-2023-4-87-95

**A METHOD FOR REARRANGING
THE PARAMETERS OF TWO MODELS OF THE VOLUME CURVE**

A.V. Konoplev

Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of the Department of «Machine Science and mechanical engineering»

Yu.O. Hryhoriev

Ph.D. Associate Professor of the Department of «Mathematics, physics and astronomy»

V.V. Halevskiy

Senior Lecturer of the Department «Machine Science and mechanical engineering»

Odesa National Maritime University, Odesa, Ukraine

Abstract. *The problem related to the recalculation of the parameters of the power equation of the fatigue curve and the parameters of the Weibull equation is considered. An analysis of one of the existing methods was carried out, which is based on a number of assumptions and therefore has low accuracy. It is emphasized that the development of this direction is relevant, as it expands the possibilities of comparative analysis of experimental data published in literary sources. In addition, the recalculation of the parameters of the fatigue curve allows for the extrapolation of the fatigue curve in the region of long durability.*

The article offers an analytical approach to recalculating the parameters of the power equation to the parameters of the Weibull equation using the «wxMaxima» computer mathematics system. Practical calculations were carried out in relation to the test results of four types of samples made of structural grades of steel.

Keywords: *fatigue curves, endurance limit, recalculation of parameters of fatigue curves.*

Вступ. Найчастіше результати випробувань на опір втоми подають у логарифмічних або напівлогарифмічних координатах. Тим часом, при вирішенні низки практичних та наукових завдань, наприклад, при зіставленні та аналізі результатів, отриманих різними авторами, необхідно ці результати привести до порівнянного вигляду, тобто, зробити взаємний перерахунок параметрів рівнянь кривих втоми, виражених різними математичними моделями. Крім того, шляхом перерахунку цих параметрів можна складену криву втоми подати у вигляді єдиної кривої, яка носить асимптотичний характер.

Як приклад розглянемо перерахунок параметрів степеневого рівняння в параметри рівняння Вейбула. Актуальність саме такого перерахунку полягає в тому, що рівняння кривої втоми Вейбула має, як правило, більш високий коефіцієнт кореляції, і, будучи асимптотичним, краще, ніж степеневе, відповідає експериментальним даним в області великих довговічностей. Завдання перерахунку параметрів не нове і розглядалося у ряді робіт [1; 2]. Розглянемо один із відомих методів вирішення цього завдання. Для проведення аналізу запишемо степеневе рівняння та рівняння Вейбула в їхньому канонічному вигляді

$$\sigma^m N = \sigma_R^m N_G = \sigma_d^m N = 10^C = const, \quad (1)$$

$$(\sigma - \sigma_R)^{m_w} N = 10^{C_w} = const. \quad (2)$$

де σ і N – поточна напруга та довговічність до руйнування;

σ_R – границя витривалості;

m , m_w , C та C_w – параметри;

N_G – абсциса точки перелому кривої втоми;

σ_d – ордината кривої втоми.

Попередньо було прийнято припущення про рівність абсциси точки перелому кривої втоми $\lg N_G$ параметру C_W . Крім того, було прийнято, що граничні значення напружень σ_{zp} та довговічностей до руйнування N_{zp} на границі багато та малоциклової втоми для обох моделей також однакові.

У результаті з урахуванням прийнятих припущень було отримано такі вирази для перерахунку властивостей m і C в параметри m_W і C_W [1]:

$$m_W = \frac{C_W - \lg N_{zp}}{\lg(\sigma_{zp} - \sigma_R)} = \frac{C_C [1 - \lg(\sigma_R / \sigma_{zp})] - \lg N_{zp}}{\lg(\sigma_{zp} - \sigma_R)}, \quad (3)$$

$$C_W = \lg N_G = C_C (\lg \sigma_d - \lg \sigma_R) / \lg \sigma_d. \quad (4)$$

Залежності (3) і (4) є наближеними через прийняті припущення і рекомендовані для встановлення попереднього співвідношення параметрів.

Більш точний результат можна отримати іншими методами. Наприклад, ґрунтуючись на інтегральному методі, згідно з яким приймається рівність площ, обмежених, з одного боку, кривими та їх лінійними апроксимаціями, а з іншого – осями координат у тій чи іншій системі координат [3].

Мета. Метою статті є отримання залежностей для перерахунку параметрів степеневого рівняння кривої втоми в параметри рівняння Вейбула і способу їх раціонального розв'язання.

Виклад основного матеріалу. Для зручності графічного уявлення кривих втоми прологарифмуємо рівняння (1) і (2). При цьому параметри підберемо таким чином, щоб рівняння (2) найкращим чином апроксимувало рівняння (1).

$$\lg N = C - m \lg \sigma, \quad (5)$$

$$\lg N = C_w - m_w \lg(\sigma - \sigma_R). \quad (6)$$

Графіки цих рівнянь у логарифмічних координатах зображено на рис. 1.

Для спрощення міркувань введемо позначення $x = \lg(\sigma - \sigma_R)$ та $y = \lg N$.

Тоді $10^x = \sigma - \sigma_R$, $\sigma = 10^x + \sigma_R$, $\lg \sigma = \lg(10^x + \sigma_R)$ та рівняння (5) і (6) приймуть вигляд

$$y = C - m \lg(10^x + \sigma_R), \quad (7)$$

$$y = C_w - m_w x. \quad (8)$$

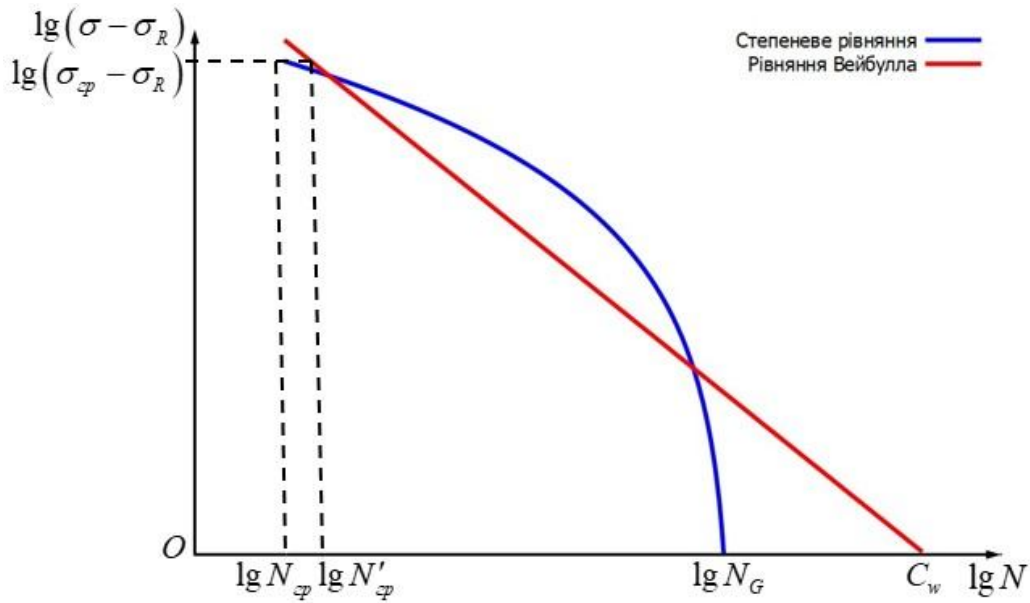


Рис. 1. Взаємне розташування кривих втомі, що задані степеневим рівнянням та рівнянням Вейбула в координатах $\lg N$, $\lg(\sigma - \sigma_R)$

Запишемо проміжки зміни змінних: $x \in [0, \lg(\sigma_{sp} - \sigma_R)]$, $y \in [\lg N_{sp}, C_w]$ та визначимо параметри m_w і C_w за умови рівності відповідних площ. Також вважатимемо, що $\lg N_{sp} = \lg N'_{sp}$. З рівняння (6) знайдемо C_w . Враховуючи, що пряма (8) проходить через точку з координатами: $x_0 = \lg(\sigma_{sp} - \sigma_R)$, $y_0 = \lg N_{sp}$ будемо мати

$$\lg N_{sp} = C_w - m_w \lg(\sigma_{sp} - \sigma_R),$$

звідки

$$C_w = \lg N_{sp} + m_w \lg(\sigma_{sp} - \sigma_R). \quad (9)$$

Другий параметр m_w знайдемо із умови рівності площ $S_1 = S_2$, де S_1 – площа трапеції, що обмежена знизу віссю $O \lg N$, ліворуч віссю $O \lg(\sigma - \sigma_R)$, праворуч прямою (6) (тобто (8)), зверху прямою $\lg(\sigma - \sigma_R) = \lg(\sigma_{zp} - \sigma_R)$, тобто $x = \lg(\sigma_{zp} - \sigma_R)$;

S_2 – площа криволінійної трапеції, вона обмежена знизу віссю $O \lg N$, ліворуч віссю $O \lg(\sigma - \sigma_R)$, праворуч кривою (5) (тобто (7)), зверху прямою $\lg(\sigma - \sigma_R) = \lg(\sigma_{zp} - \sigma_R)$, тобто $x = \lg(\sigma_{zp} - \sigma_R)$.

$$S_1 = \frac{1}{2} (C_w - \lg N_{zp}) \lg(\sigma_{zp} - \sigma_R) + \lg N_{zp} \lg(\sigma_{zp} - \sigma_R). \quad (10)$$

Підставляючи C_w з рівності (9) в рівність (10), будемо мати

$$S_1 = \frac{1}{2} m_w \lg^2(\sigma_{zp} - \sigma_R) + \lg N_{zp} \lg(\sigma_{zp} - \sigma_R).$$

Знайдемо площу криволінійної трапеції

$$S_2 = \int_0^{\lg(\sigma_{zp} - \sigma_R)} (C - m \lg(10^x + \sigma_R)) dx,$$

$$S_2 = C \lg(\sigma_{zp} - \sigma_R) - m \int_0^{\lg(\sigma_{zp} - \sigma_R)} \lg(10^x + \sigma_R) dx.$$

Позначимо

$$\sigma = 10^x + \sigma_R, \quad d\sigma = 10^x \ln 10 dx = (\sigma - \sigma_R) \ln 10 dx,$$

тоді

$$S_2 = C \lg(\sigma_{zp} - \sigma_R) - \frac{m}{\ln 10} \int_{\sigma_R+1}^{\sigma_{zp}} \frac{\lg \sigma}{\sigma - \sigma_R} d\sigma.$$

Позначимо через

$$I = \frac{m}{\ln 10} \int_{\sigma_R+1}^{\sigma_{zp}} \frac{\lg \sigma}{\sigma - \sigma_R} d\sigma$$

та запишемо S_2 в наступному вигляді

$$S_2 = C \lg(\sigma_{zp} - \sigma_R) - I.$$

Із рівності $S_1 = S_2$ знайдемо m_w

$$m_w = 2 \frac{C \lg(\sigma_{zp} - \sigma_R) - I - \lg N_{zp} \lg(\sigma_{zp} - \sigma_R)}{\lg^2(\sigma_{zp} - \sigma_R)},$$

або

$$m_w = 2 \frac{(C - \lg N_{zp}) \lg(\sigma_{zp} - \sigma_R) - I}{\lg^2(\sigma_{zp} - \sigma_R)}. \quad (11)$$

Для перевірки отриманих формул звернемося до експериментальних даних [4] і зробимо перерахунок параметрів степеневого рівняння до параметрів рівняння Вейбула для двох марок сталі і чотирьох типів зразків.

Сталь 45 (I тип).

Вихідні дані:

$$\sigma_R = 250 \text{ МПа}; m = 16,25; C = 45,28; N_{zp} = 10^5 \text{ циклів}; \sigma_{zp} = 300,07 \text{ МПа}.$$

Спочатку за формулою (11) обчислимо параметр m_w . Визначений інтеграл $\int_{\sigma_R+1}^{\sigma_{zp}} \frac{\lg \sigma}{\sigma - \sigma_R} d\sigma$ обчислимо в системі комп'ютерної математики «wxMaxima». В цій системі наближене обчислення визначених інтегралів виконується командою `romberg(lg σ / (σ - σR), σ, σR + 1, σzp)`.

При заданих числових значеннях, отримаємо

$$\int_{\sigma_R+1}^{\sigma_{zp}} \frac{\lg \sigma}{\sigma - \sigma_R} d\sigma = 9,4654.$$

Підставляючи числові значення у формулу (11), отримаємо $m_w = 1,1202$.

За формулою (9) знайдемо $C_w = 6,9038$.

Таким чином, рівняння (7) та (8) набувають вигляду

$$y = 45,28 - 16,26 \lg(10^x + 250), \quad y = 6,9038 - 1,1202x$$

Графіки цих рівнянь зображено на рис. 2.

Для перевірки обчислимо площі фігур: під прямою

$$S_1 = \int_0^{\lg(\sigma_{zp} - \sigma_R)} (6,9038 - 1,1202x) dx = 10,1158,$$

та під кривою

$$S_2 = \int_0^{\lg(\sigma_{zp} - \sigma_R)} (45,28 - 16,26 \lg(10^x + 250)) dx = 10,1158.$$

Для перевірки обчислимо площі фігур: під прямою

$$S_1 = \int_0^{\lg(\sigma_p - \sigma_R)} (6,9038 - 1,1202x) dx = 10,1158 \cdot$$

та під кривою

$$S_2 = \int_0^{\lg(\sigma_p - \sigma_R)} (45,28 - 16,26 \lg(10^x + 250)) dx = 10,1158 \cdot$$

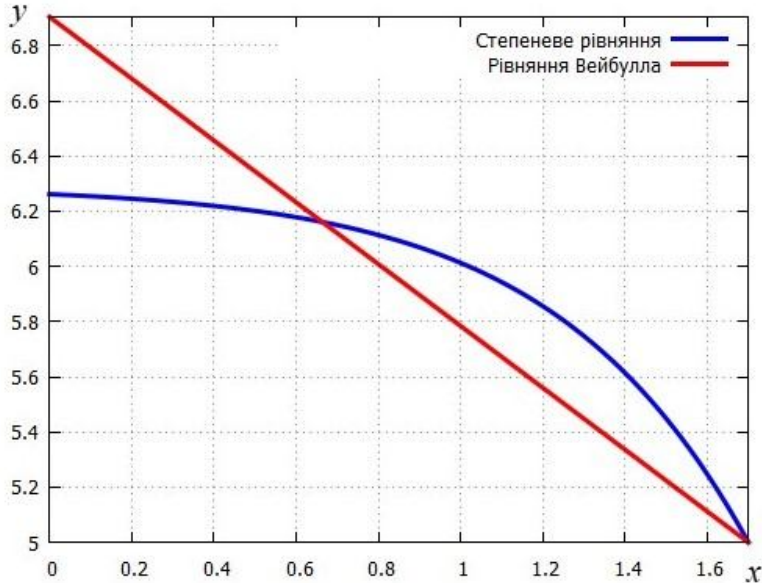


Рис. 2. Взаємне розташування кривих втомі у логарифмічній системі координат

Площі співпадають.

До функцій (7), (8) знайдемо обернені функції $x = \lg \left(10^{\frac{C-y}{m}} - \sigma_R \right)$,

$x = \frac{C_w - y}{m_w}$ та побудуємо їх графіки при даних числових значеннях (рис. 3).

Визначені аналогічним чином значення параметрів m , C , m_w та C_w для інших типів зразків представлені в табл. 1.

Результати. Запропоновано підхід до перерахунку параметрів степеневого рівняння кривої втомі в параметри рівняння Вейбула. Проведено його перевірку на зразках чотирьох типів, виготовлених із двох марок конструкційних сталей.

Таблиця 1

Розрахункові значення параметрів m , C , m_W та C_W

| σ_R , МПа | m | C | m_W | C_W |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|
| Сталь 45 (II тип) | | | | |
| 204 | 13,04 | 36,67 | 1,23 | 7,28 |
| Сталь 45 (IV тип) | | | | |
| 145 | 6,65 | 20,94 | 1,19 | 7,39 |
| Сталь 40X (I тип) | | | | |
| 274 | 18,69 | 51,91 | 1,18 | 7,00 |
| Сталь 40X (III тип) | | | | |
| 154 | 7,95 | 23,98 | 1,21 | 7,38 |
| Сталь 40X (IV тип) | | | | |
| 159 | 7,70 | 23,03 | 0,89 | 6,59 |

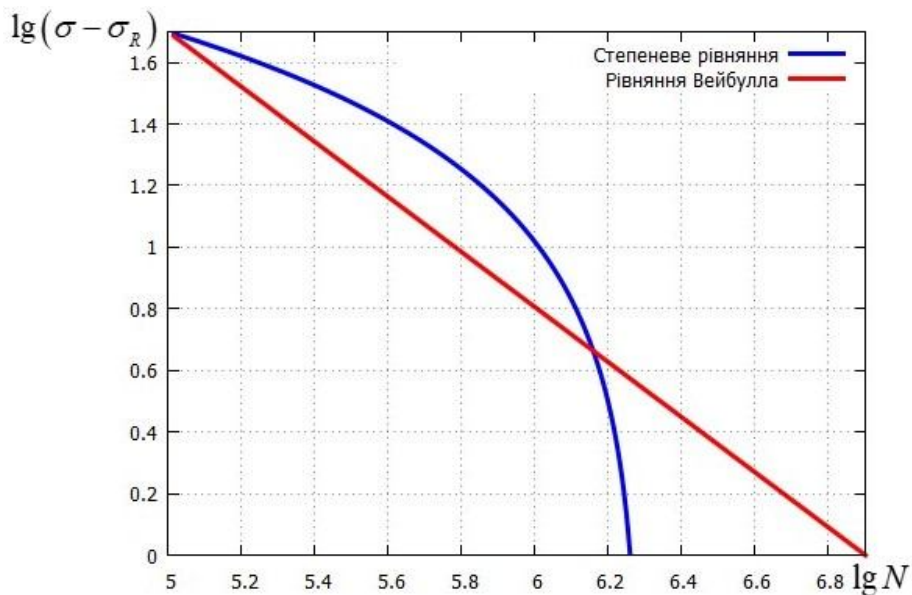


Рис. 3. Взаємне розташування кривих втоми в координатах $\lg N - \lg(\sigma - \sigma_R)$

Висновки

1. Запропонований метод перерахунку параметрів степеневого рівняння кривої втоми в параметри рівняння Вейбулла дає можливість проводити результати випробувань об'єктів, отриманих різними авторами, до порівняльного виду.
2. Отримано аналітичні вирази для їх перерахунку та способів їх вирішення.
3. Зроблено перевірку розробленого підходу на різних зразках, випробуваннях на опір втоми при симетричному циклі навантаження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Олейник Н.В., Скляр С.П. Прискорені випробування на втоми. – Київ: Наукова думка, 1985. – 304 с.
2. Рябов Б.А., Бишко М.Д. Зв'язок між параметрами кривих втоми в логарифмічних та напівлогарифмічних координатах. // Деталі машин: Респ. міжвед. наук. – техн. зб. – 1990. – Вип. 50. – С. 57-60.
3. Олейник В.Н., Конопльов А.В. Взаємозв'язок параметрів різних моделей кривих втоми. // Деталі машин: Респ. міжвед. наук.-техн. зб. – 1991. – Вип. 54. – С. 83-89.
4. Олейник Н.В., Конопльов А.В., Кібаков А.Г. Методи прискореного визначення характеристик опору втоми в практичних застосуваннях. – Одеса: Астропринт, 2000. – 138 с.

REFERENCES

1. Oleinik N.V., Sklyar S.P. Pryskoreni viprobuvannia na vtomu [Accelerated Fatigue Tests]. Kiev: Naukova dumka (Scientific thought), 1985. – 304 l.
2. Ryabov B.A., Byshko M.D. Zv'iazok mizh parametrami kryvykh vtomy v logaryfmichnykh ta napivloharyfmichnykh koordynatakh [Relationship between Fatigue Curve Parameters in Logarithmic and Semi-Logarithmic Coordinates]. // Detali mashin: Respub. mezhd. nauch.-tekhn. sb. – 1990. – Vyp. 50. – l. 57-60.
3. Oleinik V.N., Konoplev A.V. Vzaiemozv'iazok parametriv riznykh modelei kryvykh vtomy. [Correlation of Parameters of Different Fatigue Curve Models]. // Detali mashin: Respub. mezhd. nauch.-tekhn. sb. – 1991. – Vyp. 54. – l. 83-89.
4. Oleinik N.V., Konoplev A.V., Kibakov A.G. Metody pryskorenogo viznachen-nia kharakterystyk oporu vtomy v praktichnykh zastosuvanniakh [Methods of Accelerated Determination of Fatigue Resistance Characteristics in Practical Applications]. – Odesa: Astroprint, 2000. – 138 l.

Стаття надійшла до редакції 10.10.2023

Посилання на статтю: Конопльов А.В., Григор'єв Ю.О., Галевський В.В.

Спосіб перерахунку параметрів двох моделей кривої втоми // Вісник Одеського національного морського університету: Зб. наук. праць, 2023. № 4 (71). С. 87-95. DOI 10.47049/2226-1893-2023- 4-87-95.

Article received 10.10.2023

Reference a journalartic: Konoplev A.V., Hryhoriev Yu.O., Halevskiy V.V.

A method for rearranging the parameters of two models of the volume curve // Herald of the Odessa national maritime university: Coll. scient. works, 2023. № 4 (71). 87-95. DOI 10.47049/2226-1893-2023- 4-87-95.