УДК 517.93
DOI 10.33082/2226-1915 -2-2019-214-235

СИСТЕМА СИМВОЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ MAPLE® В МЕТОДІ ПРОЕКЦІЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Л.С. Чернова

к.т.н., доцент кафедри «Інформаційні управляючі системи і технології»

Національний університет кораблебудування ім. адмірала Макарова

Анотація. *В рамках даного дослідження запропоновано спосіб спрощення комбінаторного розв'язку задачі дискретної оптимізації. Він заснований на тому, що виконується декомпозиція системи, яка відображає систему обмежень багатовимірної вихідної задачі на двовимірну координатну площину. Такий спосіб дозволяє отримати просту систему графічних розв'язувань складної задачі лінійної дискретної оптимізації. Автоматизація розрахунків в середовищі Maple® складає передумови для подальшого розвитку та удосконалення подібних алгоритмів та використання в магістерських освітніх програмах.*

Ключові слова: *лінійна оптимізація, дискретна оптимізація, система обмежень, комбінаторний метод, метод Жордана-Гаусса, декомпозиція, редукція, графічний розв'язок, Maple®.*

УДК 517.93
DOI 10.33082/2226-1915 -2-2019-214-235

СИСТЕМА СИМВОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE® В МЕТОДЕ ПРОЕКЦИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМІЗАЦИИ

Л.С. Чернова
к.т.н., доцент кафедры «Інформационные управляющие системы и технологии»

Национальный университет кораблестроения им. адм. Макарова

Аннотация. *В рамках данного исследования предложен способ упрощения комбинаторного решения задачи дискретной оптимизации. Он основан на том, что выполняется декомпозиция системы, которая отражает систему ограничений многомерной исходной задачи на двумерную координатную плоскость. Такой способ позволяет получить простую систему графических решений сложной задачи линейной дискретной оптимизации. Автоматизация расчетов в среде Maple® составляет предпосылки для дальнейшего развития и совершенствования подобных алгоритмов и использование в магистерских образовательных программах.*

Ключевые слова: *линейная оптимизация, дискретная оптимизация, система ограничений, комбинаторный метод, метод Жордана-Гаусса, декомпозиция, редукция, графическое решение, Maple®.*

UDC 005.4:001.89
DOI 10.33082/2226-1915 -2-2019-214-235

MAPLE® SYMBOLIC MATHEMATICS SYSTEM IN PROJECTIONS FOR DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEMS

L.S. Chernova
Ph.D., Associate Professor
Department of Information Management Systems and Technologies

National University of Shipbuilding them. Admiral Makarov

This research provides a way for simplifying the combinatory solution of a discrete optimization problem. It is based on decomposition of the system that represents the system constraining a multidimensional output problem to the two-dimensional coordinate plane. Such method allows obtaining a simple system of graphical solutions of a complicated linear discrete optimization problem. The automation of calculations in the Maple® environment provides the basis for further development and improvement of such algorithms, and for using in teaching a number of disciplines in education programs on IT project management aimed at Master's degree
Keywords: *IT project management, education programs aimed at Master's degree, linear optimization, discrete optimization, system of constraints, combinatory method, the gauss-jordan method, decomposition, reduction, graphical solution, Maple®.*

Вступ. Задачі дискретної оптимізації виникають в багатьох областях, де складені моделі поточних процесів використовують математичні методи їх розв'язку за додаткових умов: умова повної або часткової цілочисельності невідомих або бінарний характер невідомих (0 або 1). Найвідоміші задачі дискретної лінійної оптимізації є задача про комівояжера, задача про ранець та задача про призначення. На цей час дискретна оптимізація сформована як самостійний розділ теорії оптимізації. Вона оперує сучасними комбінаторними методами та алгоритмами для розв'язку практичних задач. В результаті їх застосування отримуються первісні опорні плани задачі, подальша оцінка їх оптимальності, покращення планів уразі їх не оптимальності та граничні оцінки цільової функції [1; 2; 3; 4].

Оскільки більшість задач дискретної оптимізації належить до класу задач NP, то є актуальним використання алгоритмів спрощення задачі без втрати контрольованої точності розв'язку [5; 6; 7]. Для процедури спрощення використовують відомий взаємозв'язок систем лінійних алгебраїчних рівнянь з системою лінійних алгебраїчних нерівностей та класичний апарат лінійної алгебри [8; 9; 10].

Сутність запропонованого методу полягає у використанні особливості опуклої поліедральної області Ω_I, поданої системою лінійних алгебраїчних нерівностей або рівнянь, у вигляді прямої суми підпростору та ядра [11]. За умови двовимірності ядра поліедру стає можливим редукції оптимізаційної задачі до двовимірної задачі. Отримані проекції дозволяють легко знайти оптимальний розв'язок та виконати оцінку наявності цілочислового, а потім і бінарного розв'язку. Безпосередній обчислювальний прийом спрощення такого класу задач дискретної оптимізації реалізовано методом Жордана – Гаусса в середовищі комп'ютерної математики Maple® [7; 10; 12; 13].

Постановка проблеми. Математичні моделі активних систем у багатьох випадках інтерпретуються як задачі дискретної оптимізації [1; 2; 14; 15]. Розв'язок задач дискретної оптимізації пов'язаний з принциповими труднощами [2]. Відомі сучасні методи і алгоритми точного та наближеного розв'язку таких задач вивчаються з урахуванням належності їх до, так званих, задач з класу ***P*** та ***NP*** (алгоритми поліноміальної та експоненціальної реалізації розв'язку) [5].

Комбінаторні та евристичні методи точного та наближеного розв'язку практичних задач дискретної оптимізації займають вагоме місце в отриманні оптимальних значень таких задач [1]. Реалізація таких алгоритмів розв'язку потребує наявності припустимого первісного опорного плану задачі, процедури оцінки оптимальності та покращення його у разі не оптимальності [5; 6].

Розроблені на цей час методи розв'язку задач дискретної оптимізації потребують розробку алгоритмів, які дозволяють отримувати наближений розв'язок з гарантованою оцінкою відхилення від оптимуму.

Алгоритми спрощення в задачах дискретної оптимізації є ефективним прийомом пошуку розв'язку оптимізаційної задачі [16; 17; 18]. Якщо виконати проектування багатовимірного процесу на двовимірну площину, то такий прийом дозволить наочно спостерігати за припустимою множиною (решіткою) параметрів задачі. Можна виконувати оцінку знизу та зверху значень цільової функції задачі та динамічно оцінювати можливість диверсифікації базисних оптимальних змінних з гарантованою точністю.

Розв'язання протиріч між вимогами щодо повноти модельних представлень в активних системах та методами отримання розв'язків їх математичних моделей можливо за рахунок раціональної редукції алгоритмів розв'язання складних систем рівнянь [17]. Сутність недостатньо розв'язаної проблеми щодо пошуку розв'язань в задачах дискретної оптимізації полягає у необхідності розробки та реалізації методики спрощення комбінаторного розв'язку задачі дискретної оптимізації. В даному дослідженні запропоновано виконати декомпозицію системи шляхом проекції вихідної багатовимірної задачі на двовимірні координатні площини. За такого прийому вихідна задача трансформується в сімейство підсистем, що дозволяє отримати систему графічних розв'язувань складної задачі лінійної дискретної оптимізації. З методичної та дослідницької точок зору залучено програмне середовище Maple® . Кожному з етапів задачі поставлено у відповідність підпрограма автоматизації розрахунків та візуалізації результатів розв'язку (рис. 1).

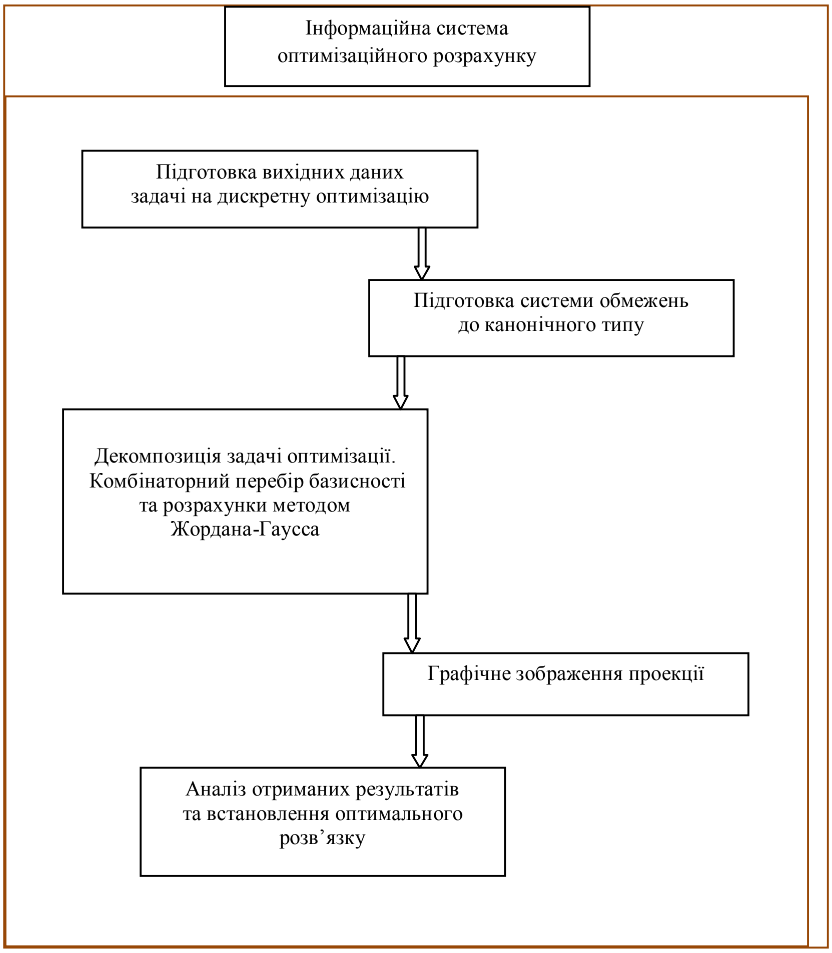

Рис. 1. Укрупнена UML діаграма інформаційної системи

Метою статті є залучення і використання стандартних обчислювальних процедур лінійної алгебри та деяких прийомів лінійної оптимізації для спрощення розв'язку багатовимірних задач дискретної оптимізації з подальшим наочним представленням геометричної інтерпретації розв'язку задачі лінійної дискретної оптимізації. Для досягнення поставленої мети були поставлені такі завдання: вилучити клас задач, які підлягають спрощенню; навести розрахунки модельного прикладу.

Виклад основного матеріалу. Сформулюємо задачу про оптимальне розміщення n -множин A_j, $j = 1,...,n$ на універсальній множині U. Нехай кожна множина A_j, $j = 1,...,n$ характеризується двома скалярними величинами: c_j − цінністю та a_j − потужністю або вагою $|A_j|$. Водночас виконується умова, що потужність універсальної множини $|U| = B$ менша за сумарну потужність всіх A_j. Сутність такої оптимізаційної задачі полягає в тому, що з загальної сукупності A_j необхідно обрати певний набір A_j для занурення в U, сумарна цінність яких є максимальною

Сумарна потужність $\sum_{j=1}^{n} a_j > B$ більше потужності універсальної множини, тобто повний набір множин розмістити неможливо. В U може бути розміщено тільки частина (набір) множин A_j. Введемо n булевих (дихотомічних або бінарних) змінних

$$x_j = \begin{cases} 0, & A_j \text{ не розміщується в } U, \\ 1, & A_j \text{ розміщується в } U, \end{cases} \tag{1}$$

де $j = 1,...,n$.

Введення бінарних невідомих (1) - $x_j = 0 \vee 1$, $j = 1,...,n$ дозволяє скласти цільову функцію W_I та обмеження Ω_I наступної оптимізаційної задачі

$$\begin{aligned} W_I &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \\ \Omega_I &: a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le B, \\ x_j &= 0 \vee 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

Згідно до постановки задачі $c_j > 0$, $0 < a_j \le B$, $j = 1, 2, \ldots, n.$

Таку задачу (2) в теорії дискретної оптимізації називають задачею про одновимірний ранець. Розв’язати таку задачу − це означає знайти серед 2^n n-вимірних векторів такий вектор $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, який задовольняє обмеженням Ω_I та надає максимального значення цільовій функції W_I (рис. 2).

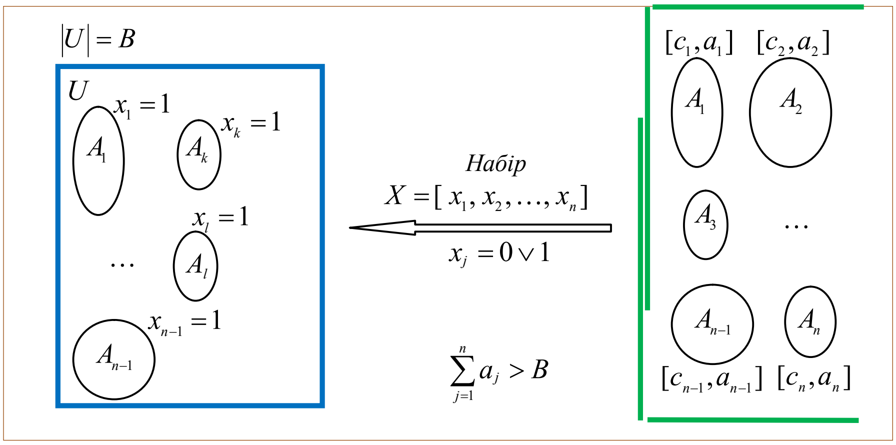

Рис. 2. Задача про занурення A_j в U (одновимірний ранець)

Розглянемо узагальнену постановку задачі про одновимірний ранець. Розбиваємо універсальну множину на власні підмножини $U = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m$ з умовою $|U_i| = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, та $B = \sum_{i=1}^{m} b_i$ Задача занурення множин A_j, $j = 1, \ldots, n$ в $U = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m$ інтерпретує A_j як множину не з однією властивістю a_j, а з цілою низкою a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$. Властивості надаються матрицею $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Математична форма такої оптимізаційної задачі на розміщення A_j в $U = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m$ має вигляд

$$
\begin{gathered}
\mathrm{W}_I = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max, \\
\Omega_I : \begin{cases}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1, \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2, \\
\vdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \vdots \\
a_{m-1,1} x_1 + a_{m-1,2} x_2 + \ldots + a_{m-1,n} x_n \le b_{m-1}, \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m,
\end{cases} \\
x_j = 0 \vee 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Необхідно враховувати, що $c_j > 0$, $0 < a_{ij} \le B$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n.$ Для $\forall i \in [1, m]$ виконується $a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} > b_i$. Це означає, що не можливо розмістити всі множини A_j, $j=1,...,n$ в жодній підмножині $U = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m$. Розв'язком задачі є набір *n* – вимірних векторів $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Прийнято такий тип задач називати задачею про багатовимірний ранець. Сформульована задача інтерпретується як задача про оптимальний вибір в управлінні проектами.

Для реалізації *n* проектів (A_j, $j=1,...,n$) надаються певні ресурси, представлені у вигляді вектора ресурсів $b = [b_1, b_2, \ldots, b_m]^T$ Матриця $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ визначає норми витрат ресурсу b_j для реалізації проекту A_j. Прибуток від впровадження проекту A_j складає $c_j > 0$. Необхідно обрати набір проектів A_j, який дозволить отримати максимальний прибуток. Введемо булевий вектор $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$

де $x_j = \begin{cases} 0, & \text{проект } A_j \text{ не реалізується,} \\ 1, & \text{проект } A_j \text{ реалізується,} \end{cases}$

$j=1,...,n$.

Отримаємо задачу

$$\begin{aligned} & W_I = CX^T \to \max, \\ & \Omega_I : AX \le b, \\ & x_j = 0 \vee 1, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ , n. \end{aligned} \tag{4}$$

Модель проектного менеджменту (4) повністю збігається з задачею про багатовимірний ранець (3).

На цей час відомо, що наведені задачі (3), (4) не можуть бути точно розв'язані. Виконані вичерпні досліджені властивості припустимих та оптимальних розв'язків задач про ранець, запропоновано декілька алгоритмів [2; 5] покрокового наближення до оптимального розв'язку. Так алгоритм Данцига та так звані «жадібні» процедури складають основу евристичних алгоритмів [18].

В роботі запропоновано та строго обґрунтовано підхід до знаходження оптимального розв'язку широкого класу задач про багатовимірний ранець. Сутність метода полягає у використанні особливості опуклої поліедральної області Ω_I, поданої системою лінійних алгебраїчних нерівностей або рівнянь, у вигляді прямої суми підпростору та ядра [10; 17]. За умови двовимірності ядра поліедру стає можливою редукція оптимізаційної задачі до двовимірної задачі. Отримані проекції дозволяють легко знайти оптимальний розв'язок та виконати оцінку наявності цілочислового, а потім і бінарного розв'язку.

Іншими словами, запропоновано проектування поліедру Ω_I на підмножини множини базисних векторів системи обмежень оптимізаційної лінійної задачі. Для частинного випадку $m - n \le 2$, де m − кількість обмежень Ω_I, n − ранг $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ проекції елементарні, оскільки є двовимірними. Аналіз решітки цілочислових значень проекції та розв'язок задачі виконати нескладно.

Першим кроком в такому алгоритмі є підготовка системи обмежень до редукції. Отже, нехай маємо загальну оптимізаційну задачу у вигляді

$$W_I = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = 1, \ldots, k, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = k+1, \ldots, m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, \ldots, l.$$

Відомо, що таку задачу можливо звести до канонічної форми

$$W_I = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\Omega_I : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Зведення виконують завдяки стандартним прийомам перетворення. Так, рівняння системи обмежень еквівалентне системі двох нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le -b_i. \end{cases}$$

Довільні за знаком змінні можуть бути представлені у вигляді різниці 2-х невід'ємних змінних

$$x_j = u_j - v_j, \qquad u_j \ge 0, \ v_j \ge 0.$$

Перехід від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь виконують додаванням невід'ємної (балансової) змінної

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \qquad x_{n+i} \ge 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Для спрощення перетворення також використовують перехід від максимізації до мінімізації цільової функції і навпаки

$$\mathrm{W}_I = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \Leftrightarrow \mathrm{W}_I = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \cdot$$

З огляду на це, не порушуючи загальності міркувань, нехай маємо задачу лінійної оптимізації поданої у канонічній формі

$$\begin{gathered} \mathrm{W}_I = CX \to \max \\ \Omega_I : AX = B, \\ X \ge 0, \end{gathered}$$

де ранг матриці коефіцієнтів системи обмежень рівний $\mathrm{rang} A = m$.

Розв'язуючи систему методом Жордано-Гаусса за довільною базисною комбінацією змінних, отримаємо проекцію n -вимірної вихідної задачі на $(m-n)$ − вимірний простір. Оскільки до розгляду беремо клас задач з умовою $m - n = 2$, то маємо проектування R^n на двовимірну площину R^2.

Розглянемо модельний приклад розв'язку, який ґрунтується на проектуванні багатовимірного процесу у R^6 на двовимірний простір R^2.

Модельний приклад.

Розв'язати оптимізаційну задачу за умовою $x_j \ge 0, j = 1, \dots, n.$. Отримати також повністю цілочисловий розв'язок та розв'язок за умови $x_j = 0 \vee 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$

$$\mathrm{W}_I = x_1 + 8x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 7, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 8, \end{cases} \quad .$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Виконуємо перехід до канонічної форми задачі лінійної оптимізації

$$W_I = x_1 + 8x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max,$$
$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 8, \end{cases} .$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Система обмежень складається з чотирьох незалежних рівнянь $rang(A) = 4$

$$W_I = x_1 + 8x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max,$$
$$\Omega_I : \begin{cases} \frac{13}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + x_5 = 2, \\ \frac{19}{6}x_3 + \frac{4}{3}x_4 + x_1 = 1, \\ -\frac{3}{2}x_3 + x_2 = 1, \\ x_3 - 2x_4 + x_6 = 0, \end{cases} \quad (5)$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Переходимо від канонічної форми представлення задачі до стандартної. Такий перехід(проектування) виконують розв'язком системи методом Жордана-Гаусса. (табл. 1) Для наведеної задачі проекції $R^6 \Rightarrow R^2$ можливо виконати $C_6^4 = 15$ способами. Обираємо рандомізовану базисну комбінацію Ox_3x_4.

Проекція на Ox_3x_4.

В якості базисних змінних обираємо таку четвірку x_3, x_4, x_5, x_6.

З останнього перетворення табл. 1 маємо розв'язану систему. Відкидаючи базисні змінні, забезпечуємо перехід $R^6 \Rightarrow R^2$ до двовимірних нерівностей.

Таблиця 1

Проекція на Ox_3x_4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	$\sum$
	2	3	4	3	1	0	7	20
	3	5	2	4	0	0	8	22
	3	3	5	4	0	0	6	21
	3	5	3	2	0	1	8	22
W_I	1	8	4	1	0	0	0	
	0	- 1/3	8/3	1/3	1	0	5/3	16/3
	1	5/3	2/3	4/3	0	0	8/3	22/3
	0	-2	3	0	0	0	-2	-1
	0	0	1	-2	0	1	0	0
W_I	0	19/3	10/3	- 1/3	0	0	- 8/3	
	0	0	13/6	1/3	1	0	2	11/2
	1	0	19/6	4/3	0	0	1	13/2
	0	1	- 3/2	0	0	0	1	1/2
	0	0	1	-2	0	1	0	0
W_I	0	0	77/6	- 1/3	0	0	-9	

Проекція шестивимірної вихідної задачі на координатну площину Ox_3x_4 має такий аналітичний вигляд:

$$\mathrm{W}_I = \frac{77}{6}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + 9 \to \max, \qquad \mathrm{W}_I = \frac{77}{6}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + 9 \to \max,$$

$$\Omega_I^{Ox_3x_4}:\begin{cases} \frac{13}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \le 2, \\ \frac{19}{6}x_3 + \frac{4}{3}x_4 \le 1, \\ -\frac{3}{2}x_3 \le 1, \\ x_3 - 2x_4 \le 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_I^{Ox_3x_4}:\begin{cases} 13x_3 + 2x_4 \le 12, \\ 19x_3 + 8x_4 \le 6, \\ -3x_3 \le 2, \\ x_3 - 2x_4 \le 0, \end{cases}$$

$$x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0, \qquad x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Графічний розв’язок наведено на рис. 3.

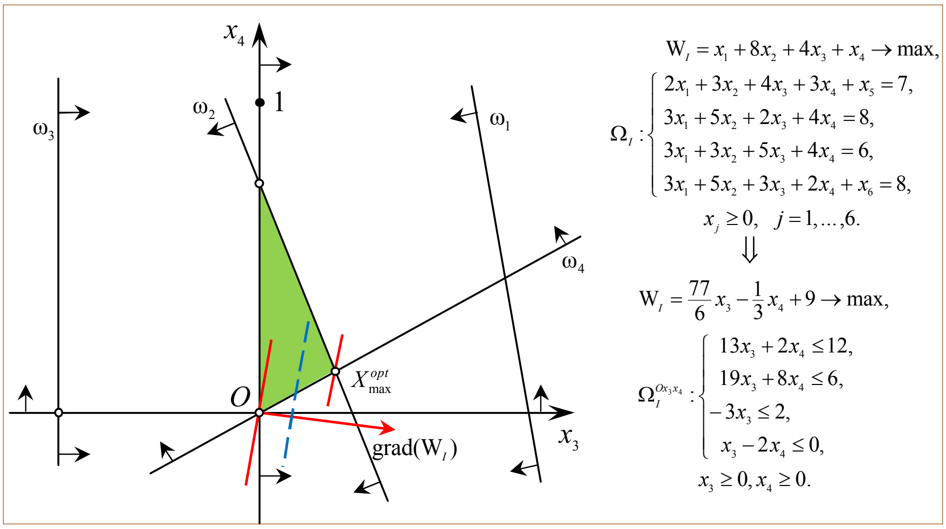

Рис. 3. Проекція на Ox_3x_4

Координати екстремальної вершини є розв'язком системи

$$X_{\max}^{opt} : \omega_2 \times \omega_4 \Leftrightarrow \begin{cases} 19x_3 + 8x_4 = 6, \\ x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{6}{23}, \\ x_4 = \dfrac{3}{23}. \end{array} \right. .$$

Інші координати отримаємо з розв'язаної системи (5). Таким чином оптимальний розв'язок вихідної задачі рівний

$$X_{\max}^{opt} = \left[\; 0, \frac{32}{23}, \frac{6}{23}, \frac{3}{23}, \frac{32}{23}, 0 \; \right].$$

Найбільше значення цільової функції буде $W_I^{\max} = \frac{289}{23}$.

Зображена $\Omega_I^{Ox_3x_4}$ проекція Ω_I на Ox_3x_4 (рис. 2) дозволяє стверджити, що єдиною точкою цілочислового розв'язку задачі є точка (0,0). З огляду на це, маємо першу оцінку цілочислового оптимального розв'язку $X_{\max}^{Z} = [x_1, x_2, 0, 0,]$.

Проекція на Ox_1x_2.

Для обчислення значень x_1, x_2 виконуємо проектування Ω_I на Ox_1x_2.

В якості базисних змінних обираємо таку четвірку: x_3, x_4, x_5, x_6. Виконуємо розрахунки методом Жордана-Гаусса (табл. 2).

З останнього перетворення табл. 2 маємо розв'язану систему.

Таблиця 2

Проекція на Ox_1x_2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	$\sum$
	2	3	4	3	1	0	7	20
	3	5	2	4	0	0	8	22
	3	3	5	4	0	0	6	21
	3	5	3	2	0	1	8	22
W_I	1	8	4	1	0	0	0	
	-4	-7	0	-5	1	0	-9	-24
	1,5	2,5	1	2	0	0	4	11
	-4,5	-9,5	0	-6	0	0	-14	-34
	-1,5	-2,5	0	-4	0	1	-4	-11
W_I	-5	-2	0	-7	0	0	-16	
	- 1/4	11/12	0	0	1	0	8/3	13/3
	0	- 2/3	1	0	0	0	- 2/3	- 1/3
	3/4	19/12	0	1	0	0	7/3	17/3
	3/2	23/6	0	0	0	1	16/3	35/3
W_I	1/4	109/12	0	0	0	0	1/3	

$$W_I = x_1 + 8x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -\frac{1}{4}x_1 + \frac{11}{12}x_2 + x_5 = \frac{8}{3}, \\ -\frac{2}{3}x_2 + x_3 = -\frac{2}{3}, \\ \frac{3}{4}x_1 + \frac{19}{12}x_2 + x_4 = \frac{7}{3}, \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{23}{6}x_2 + x_6 = \frac{16}{3}, \end{cases} \tag{6}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Зауважимо, що вже цієї системи достатню для знаходження цілочислового розв’язку. Дійсно, з попереднього проектування було встановлено $x_3 = 0$ та $x_4 = 0$. З огляду на це, друге рівняння системи дає $x_2 = 1$, а третє $x_1 = 1$. Таким чином, цілочисловим розв’язком задачі є $X^Z_{\max} = [1, 1, 0, 0,]$. Підтвердимо ці значення через графічний розв'язок задачі.

Відкидаючи базисні змінні, забезпечуємо перехід $R^6 \Rightarrow R^2$ до двовимірних нерівностей. Проекція шестивимірної вихідної задачі на координатну площину Ox_1x_2 має такий аналітичний вигляд:

$$
\begin{array}{l}
W_I = \frac{1}{4}x_1 + \frac{109}{12}x_2 - \frac{1}{3} \to \max, \\
\Omega_I^{Ox_1x_2} : \begin{cases} -\frac{1}{4}x_1 + \frac{11}{12}x_2 \le \frac{8}{3}, \\ -\frac{2}{3}x_2 \le -\frac{2}{3}, \\ \frac{3}{4}x_1 + \frac{19}{12}x_2 \le \frac{7}{3}, \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{23}{6}x_2 \le \frac{16}{3}, \end{cases} \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{l}
W_I = \frac{1}{4}x_1 + \frac{109}{12}x_2 - \frac{1}{3} \to \max, \\
\Omega_I^{Ox_1x_2} : \begin{cases} -3x_1 + 11x_2 \le 32, \\ x_2 \ge 1, \\ 9x_1 + 19x_2 \le 28, \\ 9x_1 + 23x_2 \le 32, \end{cases} \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{array}
$$

Графічний розв'язок наведено на рис. 4.

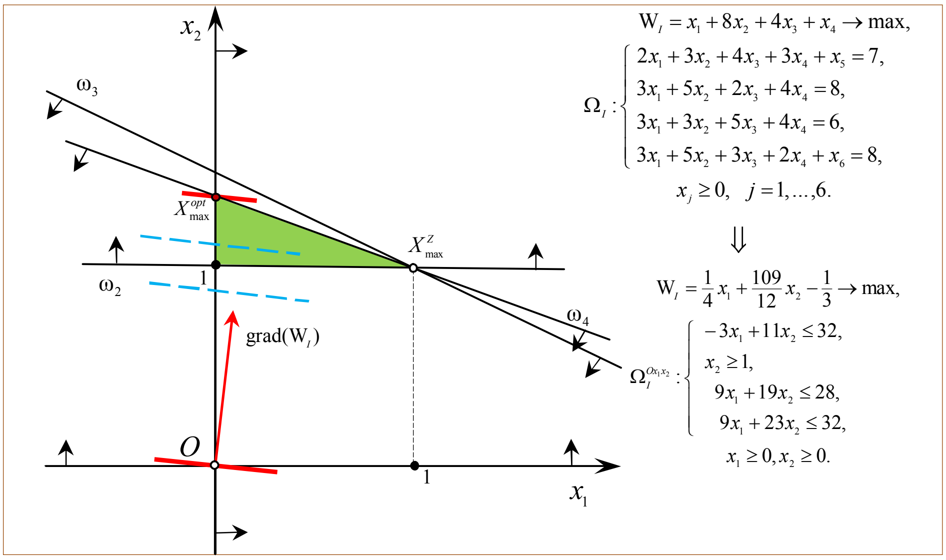

Рис. 4. Проекція на Ox_1x_2

Оптимальна вершина є розв'язком системи

$$
X_{\max}^{opt} : \omega_2 \times \omega_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ 9x_1 + 23x_2 = 32, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = \frac{32}{23}. \end{array} \right.
$$

Інші координати отримаємо з розв'язаної системи (6). Розв'язок задачі рівний

$$X_{\max}^{\text{opt}} = \left[\ 0, \frac{32}{23}, \frac{6}{23}, \frac{3}{23}, \frac{32}{23}, 0\ \right].$$

Отриманий розв'язок повністю збігається з попередньо отриманим, проектуванням на площину Ox_3x_4.

Найбільше значення цільової функції буде $W_I^{\max} = \frac{289}{23}$.

З графічного представлення видно, що єдиною цілочисловою точкою є (1,1). Враховуючи попереднє та поточне проектування, будемо мати цілочисловий розв'язок задачі $X_{\max}^{Z} = [1, 1, 0, 0,]$. В даній задачі бінарний розв'язок збігається з цілочисловим $X_{\max}^{0\vee 1} = [1, 1, 0, 0,]$.

Проекція на Ox_1x_6.

Виконуємо проектування Ω_I на Ox_1x_6, з огляду на це, в якості базисних змінних обираємо таку четвірку x_2, x_3, x_4, x_5. Виконуємо розрахунки методом Жордана-Гаусса (табл. 3).

Таблиця 3

Проекція на Ox_1x_6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	$\sum$
	2	3	4	3	1	0	7	20
	3	5	2	4	0	0	8	22
	3	3	5	4	0	0	6	21
	3	5	3	2	0	1	8	22
W_I	1	8	4	1	0	0	0	
	-4	-7	0	-5	1	0	-9	-24
	1,5	2,5	1	2	0	0	4	11
	-4,5	-9,5	0	-6	0	0	-14	-34
	-1,5	-2,5	0	-4	0	1	-4	-11
W_I	-5	-2	0	-7	0	0	-16	
	- 1/4	11/12	0	0	1	0	8/3	13/3
	0	- 2/3	1	0	0	0	- 2/3	- 1/3
	3/4	19/12	0	1	0	0	7/3	17/3
	3/2	23/6	0	0	0	1	16/3	35/3
W_I	1/4	109/12	0	0	0	0	1/3	
	- 14/23	0	0	0	1	- 11/46	32/23	71/46
	6/23	0	1	0	0	4/23	6/23	39/23
	3/23	0	0	1	0	- 19/46	3/23	39/46
	9/23	1	0	0	0	6/23	32/23	70/23
W_I	- 76/23	0	0	0	0	- 109/46	- 283/23	

З останнього кроку табл. 3 маємо розв'язану систему

$$\mathrm{W}_I = x_1 + 8x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -\dfrac{14}{23}x_1 - \dfrac{11}{23}x_6 + x_5 = \dfrac{32}{23}, \\ \dfrac{6}{23}x_1 + \dfrac{4}{23}x_6 + x_3 = \dfrac{6}{23}, \\ \dfrac{3}{23}x_1 - \dfrac{19}{46}x_6 + x_4 = \dfrac{3}{23}, \\ \dfrac{9}{23}x_1 + \dfrac{6}{23}x_6 + x_2 = \dfrac{32}{23}, \end{cases} \tag{7}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_6 \ge 0.$$

Відкидаючи базисні змінні, забезпечуємо перехід $R^6 \Rightarrow R^2$ до двовимірних нерівностей. Проекція шестивимірної вихідної задачі на координатну площину Ox_1x_6 має вигляд

$$\mathrm{W}_I = \frac{76}{23}x_1 - \frac{109}{46}x_6 + \frac{283}{23} \to \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -\dfrac{14}{23}x_1 - \dfrac{11}{46}x_6 + x_5 = \dfrac{32}{23}, \\ \dfrac{6}{23}x_1 + \dfrac{4}{23}x_6 + x_3 = \dfrac{6}{23}, \\ \dfrac{3}{23}x_1 - \dfrac{19}{46}x_6 + x_4 = \dfrac{3}{23}, \\ \dfrac{9}{23}x_1 + \dfrac{6}{23}x_6 + x_2 = \dfrac{32}{23}, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_6 \ge 0, \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{W}_I = \frac{76}{23}x_1 - \frac{109}{46}x_6 + \frac{283}{23} \to \max,$$

$$\Omega_I^{Ox_1x_6} : \begin{cases} -28x_1 - 11x_6 \le 64, \\ 3x_1 + 2x_6 \le 3, \\ 6x_1 - 19x_6 \le 6, \\ 9x_1 + 6x_6 \le 32, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_6 \ge 0.$$

Графічний розв'язок наведено на рис. 5.

Точка початку координат є оптимальним розв'язком

$$X_{\max}^{opt} = [0,0].$$

Інші координати отримаємо з розв'язаної системи (7). Маємо $X_{\max}^{\mathrm{opt}} = \left[\, 0, \frac{32}{23}, \frac{6}{23}, \frac{3}{23}, \frac{32}{23}, 0 \,\right]$. Отриманий розв'язок рівний попередньо отриманим проектуванням на площину Ox_3x_4 та Ox_1x_2.

Найбільше значення цільової функції буде $\mathrm{W}_I^{\max} = \frac{289}{23}$.

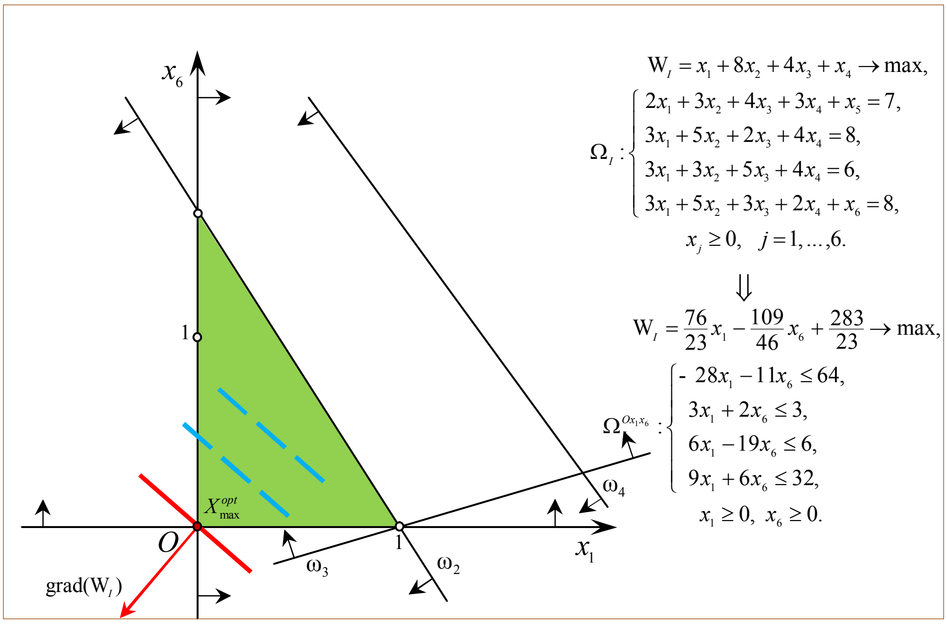

Рис. 5. Проекція на Ox_1x_6

Важливою складовою запропонованого алгоритму редукції лінійної оптимізаційної задачі є її програмна реалізація. Такий крок був виконаний в середовищі комп'ютерного пакету символьної математики Maple®. Розроблена програма, яка автоматизує розрахунки за запропонованою методикою. Програма містить два модулі:

- вибір комбінації базисних змінних та розв'язок системи обмежень методом Жордано-Гаусса;

- трирівневий оптимізаційний розрахунок ($x_j \ge 0$, $x_j \ge 0$, $x_j \ge 0$, $x_j \ge 0$ та цілі, $x_j = 0 \vee 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$) з використанням стандартної бібліотеки підпрограм.

Фрагмент коду програми наводиться нижче.

```
#
eq1:=2*x[1]+3*x[2]+4*x[3]+3*x[4]+x[5]=7:
eq2:=3*x[1]+5*x[2]+2*x[3]+4*x[4]=8:
eq3:=3*x[1]+3*x[2]+5*x[3]+4*x[4]=6:
eq4:=3*x[1]+5*x[2]+3*x[3]+2*x[4]+x[6]=8:
##########################################
#######
W[I]=zf-max;
eq1;eq2;eq3;eq4;
```

```
x[j]>=0;
ww1:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4},{x[3],x[4],x[5],x[6]});

om1:=-coeff(rhs(ww1[1]),x[1])*x[1]-
coeff(rhs(ww1[1]),x[2])*x[2]<=
rhs(ww1[1])+(-coeff(rhs(ww1[1]),x[1])*x[1]-
coeff(rhs(ww1[1]),x[2])*x[2]):

om2:=-coeff(rhs(ww1[2]),x[1])*x[1]-
coeff(rhs(ww1[2]),x[2])*x[2]<=
rhs(ww1[2])+(-coeff(rhs(ww1[2]),x[1])*x[1]-
coeff(rhs(ww1[2]),x[2])*x[2]):

om3:=-coeff(rhs(ww1[3]),x[1])*x[1]-
coeff(rhs(ww1[3]),x[2])*x[2]<=
rhs(ww1[3])+(-coeff(rhs(ww1[3]),x[1])*x[1]-
coeff(rhs(ww1[3]),x[2])*x[2]):

om4:=-coeff(rhs(ww1[4]),x[1])*x[1]-
coeff(rhs(ww1[4]),x[2])*x[2]<=
rhs(ww1[4])+(-coeff(rhs(ww1[4]),x[1])*x[1]-
coeff(rhs(ww1[4]),x[2])*x[2]):

zf:=subs({x[3]=rhs(ww1[1]),x[4]=rhs(ww1[2])},zf):
W[I]=zf-max;
om1;om2;om3;om4;
sort(x[1]>=0),sort(x[2]>=0);
p1:=inequal( [om1,om2,om3,om4,x[1]>=0,x[2]>=0],
x[1]=-1..7, x[2]=-
1..7,optionsexcluded=(colour=white),
optionsfeasible=(colour=green,thickness=1)):
display( p1)
```

Освітня програма з дисципліни «Математичні моделі та методи в управлінні проектами» містить такі основні напрямки: лінійні моделі та лінійна оптимізація, дискретна оптимізація, елементи теорії ігор. Всі напрямки потребують комп'ютерного моделювання (ІТ проектування). З огляду на це запропонований підхід автоматизації розрахунків оптимізаційних задач може бути використаний в освітніх програмах підготовки магістрів для управління проектами.

Висновки. Запропонований підхід до спрощення комбінаторного розв'язку задачі дискретної оптимізації має суттєві переваги на відмінність від відомих засобів визначення оптимального рішення – симплексного методу або методу штучного базису. Фактично виконувана декомпозиція системи зменшує розмірність системи рівнянь, яку слід розв'язати. Проекція багатовимірної системи вихідної задачі на двовимірну координатну площину дозволяє отримати просту систему графічних розв'язувань складної задачі лінійної дискретної оптимізації. З практичної точки зору запропонований метод дозволяє спростити обчислювальну складність оптимізаційних задач такого класу, а програмна реалізація дозволить залучити такий клас задач в освітніх проектах.

Отриманий науковий результат дозволяє зробити висновок, що у загальному випадку немає потреби виконувати пошук розв'язку по всіх проекціях. Достатньо визначити розв'зок тільки по одній проекції.

Прикладною цінністю запропонованого підходу є використання отриманого результату для забезпечення можливості вдосконалення складних систем, що описуються системами лінійних рівнянь з наявністю систем лінійних обмежень. Багатозначність комбінаторних проекцій обумовлює можливість зміни набору параметрів задачі. Запропоновано проектування багатовимірного оптимізаційного процесу на двовимірну площину.

Такий метод спрощення можливо застосовувати тільки для підготовлених класів задач. Ранг m матриці коефіцієнтів системи обмежень лінійної задачі дискретної оптимізації повинен задовольняти умові $n–m=2$, де n – вимірність задачі. Доцільним є узагальнення такого проектування на тривимірний простір.

1. Показано, що розв'язання задачі лінійної оптимізації є можливим за рахунок спрощення шляхом декомпозиції системи завдяки побудові проекцій багатовимірної системи вихідної задачі на двовимірні корди-натні площини.

2. Доведено на прикладі розв'язання типової модельної задачі, що запропонований підхід дозволяє отримати просту систему графічних розв'язувань складної задачі лінійної дискретної оптимізації. Отриманий результат дозволяє зробити висновок, що у загальному випадку немає потреби виконувати пошук розв'язків за всіма проекціями. Достатньо визначити розв'язок тільки по одній проекції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М.: Наука,1969*
2. *Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. М.: Наука, 1976.*
3. *Вагнер Г. Основы исследования операций. Т. 2. М.: Мир, 1973.*
4. *Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. Тбилиси: ВЦ РАН ГССР, 1974.*
5. *Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. М., 2003. 240 с.*

6. *Nozicka F., Guddat J., Hollatz H. Theorie der Linearen Optimierung. Berlin, 1972. 378 p.*
7. *Титов С.Д., Чернова Л.С. Вища та прикладна математика: Навч. посібник: У 2-х ч. Ч. 1. Х.: Факт, 2017. 336 с.*
8. *Lau D. Algebra und Diskrete Mathematik 1. Grundbegriffe der Mathematik, Algebraische Strukturen 1, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Numerische Algebra. Zweite, korrigierte und erweiterte Auflage. Berlin, Springer, 2007.- 485 p.*
9. *Jean Pierre David Low latency and division free Gauss-Jordan solver in floating point arithmetic // Journal of Parallel and Distributed Computing, 2017, Volume 106, P. 185-193.*
10. *Lax Peter D. Linear algebra and application. New York, Wiley, 2-nd ed. 2007. 377 p.*
11. *Еремин И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования М.: ФИЗМАТЛИТ, 1976. 192 с.*
12. *Титов С.Д., Чернова Л.С. Теорія визначників: Навчально-методичний посібник: Миколаїв: Торубара В.В., 2016. 271 с.*
13. *Teschl Gerald, Teschl Susanne. Mathematik für Informatiker. Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra. Berlin, Springer, 2008. 519 p.*
14. *Бугір М.К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. К., 1998. 272 с*
15. *Бугір М.К. Математика для економістів. Альма-матір Академія, 2003. 520 с.*
16. *Titov, S.D., Chernov, S.K., Chernova, L.S. Reduction in Discrete Optimization Problem, 2018 IEEE 13th International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies, CSIT 2018.*

REFERENCES

1. *Korbut A.A., Finkelstein Y.Y. (1969). Dyskretnoe programmyrovanye [Discrete programming]. Moscow: Nauka [in Russian]*
2. *Finkelstein Y.Y. (1976). Priblizhennyie metodyi i prikladnyie zadachi diskretnogo programmirovaniya [Approximate methods and applied problems of discrete programming]. Moscow: Nauka [in Russian]*
3. *Wagner H. (1973). Osnovyi issledovaniya operatsiy [Principles of Operations Research]. Moscow: Mir, 1973.*
4. *Burkov V.N., Gorgidze I.A., Lovetskiy S.E. (1974). Prikladnyie zadachi teorii grafov [Applied prob lems of the theory of graphs]. Tbilisi: Computation Centre of Republican Adacemy of Science of Georgian SSR.*

5. *Sigal I.K., Ivanova A.P. (2003). Vvedenie v prikladnoe diskretnoe programmirovanie: modeli i vyichislitelnyie algoritmyi [Introduction to applied discrete programming: models and calculation algorithms]. Moscow.*
6. *F. Nozicka, J. Guddat, H. Hollatz. (1972). The Linear Optimization Theory. Berlin.*
7. *Titov S.D., Chernova L.S. (2017). Vyshcha ta prykladna matematyka [Higher and applied mathematics]. Manual: In 2 parts, Part 1, Kharkiv, Fakt.*
8. *Lau D. (2007). Algebra and Discrete Mathematics 1. Basic Terms of Mathematics, Algebraic Struc tures 1,Linear Algebra and Analytic Geometry, Numeric Algebra. Second corrected and supplement ededition. Berlin: Springer.*
9. *Jean Pierre David (2017). Low latency and division free Gauss-Jordan solver in floating pointarithmetic. Journal of Parallel and Distributed Computing, 106, 185-193.*
10. *Lax Peter D. (2007). Linear algebra and application. New York, Wiley, 2-nd ed.*
11. *Yeremin I. I., Astafiev N. N. (1976). Vvedenie v teoriyu lineynogo i vyipuklogo programmirovaniya [Introduction to the theory of linear and convex programming]. Moscow: FIZMATLIT.*
12. *Tytov S.D., Chernova L.S. (2016). Teoriia vyznachnykiv: Navchalno- metodychnyi posibnyk [Theory of determinants: Training and methodological manual]. Mykolaiv: Torubara V.V.*
13. *Teschl Gerald, Teschl Susanne. (2008). Mathematics for Information Scientists. Volume 1: Discrete Mathematics and Linear Algebra. Berlin, Springer.*
14. *Buhir M.K. (1998). Matematyka dlia ekonomistiv. Liniina alhebra, liniini modeli [Mathematics for economists. Linear algebra, linear models]. Kyiv.*
15. *Buhir M.K. (2003). Matematyka dlia ekonomistiv [Mathematics for economists]. Alma-matir Academia, 2003.*
16. *Titov S.D., Chernov S.K., Chernova L.S. (2018). Reduction in Discrete Optimization Problem, 2018 IEEE 13th International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies, CSIT 2018.*
17. *Chernov S., Titov S., Chernova L., (...), Chernova L., Kolesnikova K. Algorithm for the simplification of solution to discrete optimization problems Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.*
18. *Kovalev M.M. (1977). Diskretnaya optimizatsiya [Discrete optimization]. Minsk: Byelorussian State University.*

Стаття надійшла до редакції 08.11.2019

Рецензенты:

доктор технічних наук, професор, проректор з наукової роботи Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова **В.С. Блінцов**

доктор технічних наук, професор кафедри Морського приладобудування Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова **Б.М. Гордєєв**