

УДК 539.374

DOI 10.47049/2226-1893-2026-1-44-64

## ВЗАЄМОДІЯ ТОНКОЇ ПІДПІРНОЇ СТІНКИ З ГРУНТОВИМ СЕРЕДОВИЩЕМ ПРИ ДИНАМІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

**А.В. Гришин**

д.т.н., професор кафедри «Машинознавство й інженерна механіка»

*Одеський національний морський університет, Одеса, Україна*

**Анотація.** Розглядається пов'язана система, що складається з тонкої підпірної стінки та ґрунтового середовища. Досліджуються напружено-деформований стан і хвильові процеси, що виникають у споруді та основі від дії динамічних навантажень. Враховуються пружно-пластичні властивості матеріалів системи. Використовується теорія пластичної течії із зміцненням, що базується на принципі максимуму Мізеса.

Вважалося, що деформації системи відбуваються при малих подовженнях, зсувах та кутах повороту. Тому залежність між приростами деформацій та переміщень визначалися лінійними співвідношеннями Коші.

Для підпірної стінки як функція навантаження застосовувалася умова Писаренка-Лебедева, а для ґрунтового масиву – умова Кулона-Мора.

Для вирішення нелінійної задачі використовувався модифікований неявний метод Ньюмарка, який є безумовно стійким, що дозволило суттєво збільшувати довжину часового кроку порівняно з явними методами та отримувати більш надійні результати.

Для чисельної реалізації запропонованої методики був застосований програмний комплекс розроблений у системі Delphi.

Результати дослідження коливальних процесів представлені у вигляді епюр переміщень та напруг у характерних точках на заданому інтервалі часу.

На основі аналізу отриманих результатів було встановлено, що зміна у часі властивостей одного елемента системи впливає на напружено-деформований стан іншого. Тому лише їхній спільний розрахунок дозволить отримати правильні результати. Крім того, при вирішенні динамічних задач необхідно враховувати деформації та напруги, що отримані від статичних навантажень, оскільки вони впливають на коливальний процес, що виникає при динамічному навантаженні системи.

**Ключові слова:** тонка підпирна стінка, ґрунтове середовище, теорія пластичної течії зі зміцненням, функція навантаження, метод скінчених елементів, динамічне навантаження, коливальний процес, епюри переміщень і напружень.

© Гришин А.В., 2026

Стаття поширюється на умовах ліцензії відкритого доступу (CC BY 4.0)

UDC 539.374

DOI 10.47049/2226-1893-2026-1-44-64

## INTERACTION OF A THIN RETAINING WALL WITH THE SOIL ENVIRONMENT UNDER DYNAMIC LOADING

**A. Grishin**

Doctor of Technical Sciences, Professor  
of the Department of «Machine Science and Engineering Mechanics»

*Odesa National Maritime University, Odesa, Ukraine*

**Abstract.** *A coupled system consisting of a thin retaining wall and soil medium is considered. The stress-strain state and wave processes that arise in the structure and the base from the action of dynamic loads are investigated. The elastic-plastic properties of the system materials are taken into account. The theory of plastic flow with strengthening is used, which is based on the Mises maximum principle. It was assumed that the deformations of the system occur at small elongations, displacements and angles of rotation. Therefore, the dependence between the increments of deformations and displacements was determined by linear Cauchy relations.*

*For the retaining wall, the Pysarenko-Lebedev condition was used as a function of the load, and for the soil massif, the Coulomb-Mohr condition. To solve the nonlinear problem, the modified implicit Newmark method was used, which is unconditionally stable, which allowed us to significantly increase the length of the time step compared to explicit methods and obtain more reliable results.*

*For the numerical implementation of the proposed method, a software package developed in the Delfi system was used. The results of the study of oscillatory processes are presented in the form of diagrams of displacements and stresses at characteristic points at a given time interval.*

*Based on the analysis of the obtained results, it was established that the change in the properties of one element of the system over time affects the stress-strain state of another. Therefore, only their joint calculation will allow obtaining correct results. In addition, when solving dynamic problems, it is necessary to take into account the deformations and stresses obtained from static loads, since they affect the oscillatory process that occurs during dynamic loading of the system.*

**Keywords:** *thin retaining wall, soil environment, theory of plastic flow with strengthening, load function, finite element method, dynamic loading, oscillatory process, diagrams of displacements and stresses.*

**Вступ.** Підпірні стіни являються однією з найбільш розповсюджених конструкцій, які застосовуються майже у всіх галузях будівництва. Вони призначені для сприйняття бічного тиску ґрунту. Найбільшого застосування у практиці проектування знайшли наступні способи його визначення:

1. Вдосконалений метод Кулона. Він передбачає плоскі поверхні ковзання і при розрахунку причальних споруд розглядається в якості основного.

2. Класичний метод Кулона. Поверхні ковзання в ньому прийняті також плоскими. Проте, при визначенні положення площини ковзання у деяких випадках, наприклад, за наявності складного навантаження на поверхні засипки, потрібно приймати ряд додаткових припущень. Цей метод доцільно використовувати на стадії попереднього проектування, а також у випадках, коли більш точні методи є недоступними.

3. Методи, що базуються на теорії граничного напруженого стану ґрунтового середовища. Вони являються найбільш загальними і строгими. Останнім часом інженерні розробки, які базуються на цій теорії, отримали суттєвий розвиток і широко використовуються при проектуванні споруд.

Незважаючи на значний прогрес в описі роботи тонких стінок при використанні пружно-пластичної постановки в розрахунках портової гідротехніки, їхнє використання знаходиться в стадії наукових розробок і в даний час не набуло поширення в проєктній практиці. Визначається це тим, що відсутня надійна апробація і доводиться долати деякі умовності в прийнятих моделях ґрунту, що описують дійсну роботу споруди.

У розробці прикладного програмного забезпечення, що реалізує скінченно-елементний підхід для вирішення завдань механіки, безперечно, лідируюче положення займає українська школа. Перш за все слід зазначити роботи А.С. Городецького і розроблене під його керівництвом сімейство програм, що не зовсім коректно об'єднується назвою «Ліра»; А.В. Перельмутера, В.С. Карпіловського, Е.З. Кріксунова, С.Ю. Фіалко та ін. співробітників «SCAD Soft»; Л.А. Розіна, С.Ф. Клованича, Ю.І. Немчинова та ін.

Міцні та деформаційні властивості матеріалів системи, що тут розглядаються при динамічному навантаженні раніше досліджувалися в наступних роботах: для бетону [1,2], для ґрунтів [3; 4]. Розрахунок тонких підпірних стінок з застосуванням теорії граничного напруженого стану при сейсмічних впливах розглядався у роботі [5]. Дослідження тонких підпірних стінок у застосованій тут нелінійній постановці автору не відомі.

Протягом всієї історії будівництва і експлуатації підпірних споруд і по теперішній час були відзначені численні випадки їх аварій і руйнувань, які можуть бути причиною загибелі людей і величезних матеріальних збитків, що є неприпустимим. Тому вдосконалення існуючих і розробка нових методів розрахунку таких споруд з урахуванням реальних властивостей матеріалів конструкції та ґрунтів, процесу складного навантаження, дії як статичних так і динамічних навантажень є **актуальною задачею**. Однак, незважаючи на виняткову важливість, питання про причини руйнування підпірних споруд розроблені далеко недостатньо. Такий стан пояснюється складністю аналізу причин руйнувань, різноманіттям їхніх форм і часто недостатністю фактичних даних спостережень за станом споруд і їхніх основ.

**Мета цієї роботи** полягає у вивченні *коливальних* процесів і напружено-деформованого стану спільної роботи тонкої підпірної стінки та ґрунтового

середовища, що знаходяться під дією статичних і динамічних навантажень. При цьому враховувалися пружно-пластичні властивості матеріалів конструкцій і ґрунту та процес складного навантаження.

**Викладення основного матеріалу.** У роботі було розглянуто спільний розрахунок тонкої підпірної стінки, що має анкерний пристрій, та ґрунтового масиву на дію зосередженого або розподіленого імпульсного навантаження. При цьому враховувалися пружнопластичні властивості їх матеріалів. Надалі таке поєднання стінки та масиву буде називатися системою. Використовувалася теорія пластичності, що базується на асоційованому законі течії зі зміцненням [6]. Матеріалом стінки може бути метал і бетон, тому як функція навантаження для неї застосовувалася умова Писаренка-Лебедєва [7], окремим випадком якої є умова Мізеса-Генки та умова Генієва [8]. Для ґрунтового середовища використовувалася умова Кулона-Мора або Боткіна [9]. Розрахункова схема розглянутої задачі показана на рис. 1.

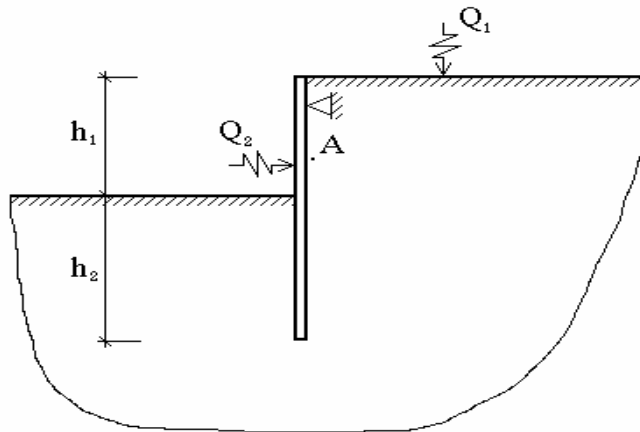


Рис. 1. Розрахункова схема системи

На підставі принципу віртуальної роботи [10], який не залежить від співвідношень напруга-деформація, в момент часу  $t$  можна отримати таку рівність:

$$\int_{\Omega} [\delta \varepsilon]^T \sigma d\Omega + \int_{\Omega} [\delta u]^T (\rho \ddot{u} + c \dot{u} - P) d\Omega + \int_{\Gamma_1} [\delta u]^T q d\Gamma = 0, \quad (1)$$

де  $\delta \varepsilon, \delta u$  – вектори віртуальних деформацій та переміщень;

$\sigma$  – вектор напруг;

$\rho$  – щільність матеріалу;

$c$  – параметр згасання;

$P$  – об'ємне навантаження;

$q$  – імпульсне поверхнєве навантаження;

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  – межа системи.

У перший доданок (1) входять деформації та напруги. Виразимо деформації через переміщення, щоб співвідношення (1) було функцією вектора переміщень і його похідної за часом.

Пластичні деформації не визначаються однозначно через напруження. Зв'язок між ними має вигляд диференціальних неінтегрованих співвідношень, які є наслідком принципу максимуму Мізеса. При малих подовженнях, зсувах і кутах повороту приращення деформації знаходяться через приращення переміщень як

$$d\varepsilon_{ks} = \frac{1}{2}(du_{k,s} + du_{s,k}). \quad (2)$$

Постулат підсумовування приращень пружної та пластичної деформацій визначається рівністю

$$d\varepsilon_{ks} = d\varepsilon_{ks}^{(e)} + d\varepsilon_{ks}^{(p)}. \quad (3)$$

Компоненти тензора приращень пружної деформації пов'язані з компонентами тензора приращень напруги законом Гука

$$d\varepsilon_{ks}^{(e)} = C_{ksmn}^{(e)} d\sigma_{mn}. \quad (4)$$

Компоненти тензора приращень пластичної деформації на околиці регулярної точки визначаються співвідношенням [6]

$$d\varepsilon_{ks}^{(p)} = d\lambda f_{,\sigma_{ks}}, \quad d\lambda = \text{const} > 0, \quad (5)$$

де  $f_{,\sigma_{ks}}$  – похідна від функції навантаження по  $\sigma_{ks}$ .

Використовуючи тензор активних напруг

$$\sigma_{ks}^0 = \sigma_{ks} - \rho_{ks}, \quad (6)$$

де  $\rho_{ks} = a e_{ks}^{(p)}$ ,  $a$  – параметр кінематичного зміцнення та умова безперервності функції навантаження. Підставляючи (4) і (5) в (3), після низки перетворень остаточно отримуємо рівняння стану

$$d\sigma_{ks} = D_{ksmn}^{(e)} d\varepsilon_{mn}, \quad \text{якщо } f = 0, d'f \leq 0 \text{ або } f = 0;$$

$$d\sigma_{ks} = D_{ksmn}^{(ep)} d\varepsilon_{mn}, \quad \text{якщо } f = 0, d'f > 0, \quad (7)$$

Тут  $D_{ksmn}^{(e)}$  – пружні постійні закону Гука;

$$D_{ksmn}^{(ep)} = \left[ D_{ksmn}^{(e)} - \frac{f_{,\sigma_{ks}} D_{ksmn}^{(e)} f_{,\sigma_{mn}} D_{ksmn}^{(e)}}{f_{,\sigma_{ks}} D_{ksmn}^{(e)} f_{,\sigma_{mn}} - \alpha f_{,\rho_{il}} f_{,\sigma_{il}}} \right]. \quad (8)$$

Рівняння стану залежить від функції навантаження та її похідних. В даний час немає та й практично не може бути єдиної функції прийнятною для всього різноманіття наявних матеріалів. Як показали експерименти, середовища, що мають різні властивості, описуються різними функціями навантаження. Тому в програмному комплексі, що реалізує запропоновану методику, використовуються шість найбільш перевірених експериментальними даними і базуються на основних передумовах механіки середовищ, що деформуються, функцій навантаження.

Розглянемо, наприклад, умову Кулона-Мора, яка застосовується для ґрунтових основ [4; 9; 12] та гірських порід [11]. В інваріантній формі воно записується у такому вигляді

$$(\sigma_0 - \sigma_i \sin \psi / \sqrt{3}) \sin \varphi + \sigma_i \cos \psi - c \cos \varphi = 0, \quad (9)$$

де  $\varphi, c$  – відповідно кут внутрішнього тертя та зчеплення у граничному стані текучості;

$\sigma_0, \sigma_i, \psi$  – інваріанти тензора напруги, наведені в [13]. Похідні від (9) мають громіздкий вигляд і тут не наводяться.

З (5) і (9) випливає, що збільшення об'ємної пластичної деформації при формозміні ґрунтового середовища визначаються як

$$d\varepsilon_0^{(p)} = d\lambda \sin \varphi. \quad (10)$$

Проте  $d\lambda > 0$  і  $\sin \varphi > 0$ , тому середовище збільшується обсягом, тобто. вона розпушується.

Ґрунти мають незворотну стисливість, пов'язану не тільки з формозміною матеріалу, але і з всебічним розтягуванням і стисненням. В цьому випадку можна припустити, що для пластичного середовища незалежно від функції навантаження (9) визначено зв'язок між першими інваріантами тензорів напружень  $\sigma_0$  та пластичної деформації  $\varepsilon_0^{(p)}$  у вигляді [6]

$$\varepsilon_0^{(p)} = f_0(\sigma_0).$$

Диференціюючи це співвідношення, знаходимо

$$d\varepsilon_0^{(p)} = f_{0,\sigma_0} d\sigma_0. \quad (11)$$

Закон течії (11) від всебічного стиснення або розтягування незалежно від (9) і розглядається як асоційований з функцією навантаження

$$f_1 = f_0 - \varepsilon_0^{(p)} = 0. \quad (12)$$

Поверхні  $f_1$  і  $f$  будуть обмежувати область пружного стану ґрунтового середовища в кожній її точці і в місцях їх перетину буде вірне співвідношення

$$d\varepsilon_0^{(p)} = f_{,\sigma_0} \sigma_0^0{}_{,\sigma_{kk}} + f_{,\sigma_0} d\sigma_0. \quad (13)$$

Вигляд функції  $f_0(\sigma_0)$  встановлюється з дослідних даних для конкретних матеріалів. Для ґрунтів деякі з функцій наведені у [14]. Наприклад, для запропонованої С.С. Григоряном залежності

$$\varepsilon_0^{(p)} = e_s [1 - \exp(-b\sigma_0)]$$

$d\varepsilon_0^{(p)}$  можна визначити як

$$d\varepsilon_0^{(p)} = b e_s \exp(-b\sigma_0) d\sigma_0.$$

Для дрібно-лінійної залежності виду

$$\varepsilon_0^{(p)} = \frac{\sigma_0 e_s}{\sigma_0 + K_0 e_s}$$

знаходимо

$$d\varepsilon_0^{(p)} = \frac{K_0 e_s^2}{(\sigma_0 + K_0 e_s)^2} d\sigma_0.$$

У наведених формулах:  $e_s$  – граничне значення об'ємної деформації при  $\sigma_0 \rightarrow \infty$ , тобто. коли матеріал набуває граничної щільності;  $K_0$  – модуль об'ємного деформування при напругах від всебічного стиснення рівних  $\sigma^T$ .

Нехай для деякої частки ґрунтового середовища визначен напружено-деформований стан, який відповідає деякій точці  $A$  на поверхні навантаження  $f$ . Як показано вище, відбувається розпушення матеріалу, при якому тиск  $\sigma_0$ , необхідний для незворотної зміни обсягу, що визначається функцією  $f_0(\sigma_0)$ , зменшується. У зв'язку з цим поверхня навантаження  $f_1$  починає переміщатися в напрямку точки  $A$ . При її досягненні слід визначати пластичні деформації з урахуванням всебічного стиснення та формозміни. У цьому стані подальше розпушення ґрунту відбуватися не може, тому що воно призвело б до зниження

його опору об'ємному тиску, що викликало б подальший рух  $f$  за точку  $A$ , а це неможливо при  $\sigma_0 = const$ . Тому збільшення пластичних об'ємних деформацій в даному положенні функцій навантаження  $f_1$  і  $f$  буде дорівнювати нулю, отже,  $\varepsilon_0^{(p)} = const$ . Отримуємо наступну дилатансійну залежність між  $\varepsilon_0$  і  $\varepsilon_i$  при навантаженні: зі збільшенням  $\varepsilon_i$  збільшується і  $\varepsilon_0$  поки  $f_1$  і  $f$  не перетнуться в точці  $A$ , але при подальшому збільшенні  $\varepsilon_i$  величина  $\varepsilon_0$  залишається постійною. У момент перетину  $f_1$  і  $f$  в точці  $A$  вектор збільшення пластичної деформації стає не ортогональним поверхні  $f$ .

Як буде показано нижче, на момент часу  $t_n$  будується ітераційний процес для визначення прирощень переміщень  $du^i$ . Якщо на  $i$ -му прирощенні навантаження відомі  $u^{i-1}$ ,  $\varepsilon^{i-1}$ ,  $\sigma^{i-1}$ , зазвичай обчислені на  $i-1$  прирощенні, то після визначення  $du^i$ , а потім  $d\varepsilon^i$  і  $d\sigma^i$  за зазначеною вище методикою, повні переміщення, деформації та напруги будуть за формулами

$$u^i = u^{i-1} + du^i, \quad \varepsilon^i = \varepsilon^{i-1} + d\varepsilon^i, \quad \sigma^i = \sigma^{i-1} + d\sigma^i.$$

При чисельному рішенні нелінійних пружно-пластичних динамічних завдань доводиться реалізовувати два основні етапи: по-перше виконати дискретизацію вихідних рівнянь як у часі, так і у сфері, займаній системою; по-друге будувати покроковий процес визначення шуканого результату на заданому відрізку часу від  $0$  до  $T$ . При дії ударних та інших типів навантаження не вдається звільнитися у вихідних рівняннях від змінної часу  $t$ , як це робиться в теорії встановлених коливань, а це збільшує розмірність завдання і вимагає додаткових часових витрат. Для першої дискретизації заданий часовий відрізок ділиться на  $N$  часових інтервалів довжиною  $\Delta t$  і у кожні дискретні моменти часу  $t_n$  будуються вихідні рівняння. Для другої дискретизації внутрішня область системи розбивається на скінченні та по нескінченній межі основи на нескінченні ізопараметричні елементи. Якщо основу обмежити, як це часто робиться під час вирішення статичних задач, скінченою областю, то відбиті від її межі хвилі можуть спотворити результати рішення. У деяких роботах, наприклад [15], рекомендується на нескінченних межах використовувати скінченні елементи з в'язким кордоном, здатні моделювати нескінченне середовище.

У програмному комплексі застосовувалися 4-и, 8-и та 9-и вузлові скінченні елементи та 4-и, 5-и та 6-и вузлові нескінченні елементи. Наприклад, для 8-й вузлових скінченних елементів функції форми в локальній системі координат мають такий вигляд [16]:

$$N_i^r(\xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1\xi_1^2)(1 + \xi_2\xi_2^2)(\xi_1\xi_1^2 + \xi_2\xi_2^2 - 1), r = 1,3,5,7;$$

$$N_i^r(\xi) = \frac{1}{2}(\xi_1^2)^2(1 + \xi_1\xi_1^2)(1 - \xi_1^2) - \frac{1}{2}(\xi_2^2)^2(1 + \xi_2\xi_2^2)(1 - \xi_2^2), r = 2,4,6,8.$$

Похідні від функцій форми  $N_i(\xi)$  за глобальними координатами  $x_k$  обчислюються як

$$N_i(\xi)_{,x_k} = N_i(\xi)_{,\xi_s} \xi_{s,x_k},$$

де  $\xi_{s,x_k}$  – елементи зворотної матриці Якобі.

Переміщення та деформації в елементах системи визначаються за такими формулами:

$$u = \sum_{i=1}^m N_i d_i, \quad \varepsilon = \sum_{i=1}^m B_i d_i, \quad (14)$$

де  $d$  – вектор вузлових переміщень елемента,  $m$  – кількість вузлів в елементі,

$B_i$  – матриця похідних від  $N_i$  по  $x_k$  [16].

Після підстановки (14) (1) і перетворень була отримана система нелінійних рівнянь алгебри, яку можна записати для моменту часу  $t$ , у вигляді наступного матричного рівняння:

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + K(d) = Q, \quad (15)$$

тут  $M$  – матриця мас;

$C$  – матриця параметрів згасання;

$K$  – матриця жорсткості, що залежить від вектора переміщень;

$Q$  – матриця діючої у вузлах імпульсної навантаження;

$d, \dot{d}, \ddot{d}$  – відповідно вектора вузлових переміщень швидкості та прискорень.

Елемент матриці мас  $M$  для вузла  $i$  обчислюється за формулою

$$\int_{\Omega} [N_i]^T \rho [N_1, N_1, \dots, N_m] d\Omega = \sum_{j=1}^m [M_{ij}], \quad (16)$$

де  $m$  – число вузлів у системі,

$\rho$  – щільність матеріалу.

У (16) використовуються такі самі функції форми, як і (14), тому  $M$  є матрицею розподілених мас. Якщо масу елемента рівномірно розподілити між вузлами, то матриця стає діагональною і є матрицею зосереджених мас.

Елементи матриці демпфування визначаються за формулою аналогічною (16), в якій необхідно  $\rho$  замінити на коефіцієнт демпфування  $c$ . Матриця демпфування не може формуватися за допомогою матриць демпфування окремих

елементів як матриця мас  $M$ , а визначається для всієї системи на підставі її загальної дисипативної енергії, що викликає значні труднощі. Тому часто матрицю  $C$  визначають на основі гіпотези Релея як лінійну комбінацію подібних матриць мас  $M$  і жорсткості  $K$  [17]

$$C = \alpha M + \beta K, \quad (17)$$

де  $\alpha$  та  $\beta$  постійні, що визначаються за допомогою коефіцієнтів згасання. Наприклад, для ґрунтових середовищ хороше узгодження з результатами дослідних даних було отримано для  $\beta = 0,005$  та  $\alpha = 0$  [15]. Питання демпфування в конструкціях та матеріалах розглянуті у монографії [18].

Матриця жорсткості  $K$  залежить від вузлових переміщень  $d$ , які явно і неявно входять у матрицю  $D^{(ep)}$  (8). Зазвичай в ітераційному процесі елементи цієї матриці визначаються з попередніх наближень, тому  $K$  подібна до  $M$ .

Рівняння рівноваги (15) виконується тільки в дискретних точках  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, T$ ) заданого відрізка часу, але зміни переміщень, швидкостей та прискорень на часовому інтервалі  $\Delta t$  впливає на точність та стійкість рішень на момент часу  $t_k + \Delta t$ . Основними методами вирішення динамічних задач є методи прямого інтегрування, які базуються на даних передумовах. Далі передбачається, що для визначення рішення в момент часу  $t_n + \Delta t$  повинні бути відомі рішення для всіх попередніх моментів часу  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , а при  $t = 0$  повинні бути задані початкові умови  $d_0, \dot{d}_0, \ddot{d}_0$ . Якщо при обчисленні переміщень для моменту часу  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  використовується рівняння рівноваги (15) для моменту часу  $t_n$ , то подібні методи є явними. Якщо використовується (15) у момент часу  $t_{n+1}$ , то методи називаються неявними. Класичні явні та неявні методи для вирішення лінійних завдань викладені у [17]. Метод лінійного прискорення в приростах для нелінійних задач наведено в [19].

Формула для визначення вузлових переміщень у момент часу для явного методу за схемою центральних різниць має вигляд

$$d_{n+1} = [M + 0,5C\Delta t]^{-1} (\Delta t^2 [p - K(d_n)] - 2Md_n - [M - 0,5C\Delta t]d_{n-1}). \quad (18)$$

Якщо матриці  $M$  і  $C$  діагональні, то звернення матриці  $[M - 0,5C\Delta t]$  можна проводити на рівні елементів без утворення матриці системи, що дуже полегшує обчислювальний процес. Як видно з (18), не потрібно виконувати звернення матриці  $K(d_n)$ , але доводиться витратити більше часу на її обчислення, пов'язане з нелінійністю. Основним недоліком явних методів є їхня умовна стійкість [17], що призводить до збільшення числа часових кроків на заданому відрізку часу  $0 - T$ , і відповідно суттєво збільшує час розрахунку.

Неявні методи є, безумовно, стійкими [17]. Це дозволяє значно збільшувати довжину часового інтервалу  $\Delta t$ , що суттєво скорочує час розрахунку. Розглянемо модифікацію методу Ньюмарка, що пов'язано з нелінійністю матриці жорсткості  $K$ . Він, як й у лінійних задачах передбачає, що прискорення змінюється лінійно на часовому інтервалі  $\Delta t$ , а переміщення і швидкості визначаються у момент часу  $t_{n+1}$  за формулами

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d_n + \Delta t \dot{d}_n + 0,5(1 - 2\alpha)\Delta t^2 \ddot{d}_n + \alpha \Delta t^2 \ddot{d}_{n+1}, \\ \dot{d}_{n+1} &= \dot{d}_n + (1 - \delta)\Delta t \ddot{d}_n + \omega \delta \Delta t \ddot{d}_{n+1}, \end{aligned} \quad (19)$$

де  $\alpha = 0,25$  і  $\delta = 0,5$  – параметри, що визначають точність та стійкість методу. Для визначення  $\ddot{d}_{n+1}$  в (19) використовується рівняння (15) для  $t_{n+1}$ . Початкове прискорення  $\ddot{d}_0$  при  $t = 0$  визначається (15) при  $d_0$ ,  $\dot{d}_0$  і  $Q_0$ , які задані в початкових умовах.

Для визначення приростів вузлових переміщень  $\Delta d$  будується додатковий ітераційний процес, який вкладається в покрокову часову процедуру методу Ньюмарка. Нехай потрібно визначити переміщення, швидкості та прискорення в момент часу  $t_{n+1}$  за умови, що в момент часу  $t_n$  вони відомі. Перед початком ітераційного процесу, тобто при  $i = 0$ , визначаємо по (19) стартові значення  $d_{n+1}^i$ ,  $\dot{d}_{n+1}^i$  при  $\ddot{d}_{n+1}^i = 0$ . Потім будується цикл, який включає наступні етапи:

1. Обчислюється нев'язка у рівнянні (15)

$$dQ^i = Q_{n+1} - M\ddot{d}_{n+1}^i - C\dot{d}_{n+1}^i - K(d_{n+1}^i). \quad (20)$$

2. Визначається ефективна матриця жорсткості

$$\bar{K} = a_0 M + a_1 C + K(d_{n+1}^i), \quad (21)$$

$$\text{де } a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t},$$

$\alpha, \delta$  – параметри методу Ньюмарка.

3. Вирішується система рівнянь алгебри і визначається прирости вузлових переміщень  $\Delta d^i$

$$\bar{K} \Delta d^i = d\bar{Q}^i. \quad (22)$$

4. Визначаються виправлені значення вузлових переміщень, швидкостей та прискорень

$$\begin{aligned} d_{n+1}^{i+1} &= d_{n+1}^i + \Delta d^i, \\ \ddot{d}_{n+1}^{i+1} &= (d_{n+1}^{i+1} - d_n^i) / \alpha \Delta t, \\ \dot{d}_{n+1}^{i+1} &= \dot{d}_{n+1}^i + \delta \Delta t \ddot{d}_{n+1}^{i+1}. \end{aligned} \quad (23)$$

5. Перевіряються умови збіжності

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\|\Delta d\|}{\|d + \Delta d\|}} \leq \varepsilon_0, \quad (24)$$

де  $\varepsilon_0$  – задана похибка обчислень.

6. Якщо умова (24) не виконується, здійснюється перехід до пункту 1. В іншому випадку цикл закінчується і в момент часу  $t_{n+1}$  приймається

$$d_{n+1} = d_{n+1}^{i+1}, \quad \dot{d}_{n+1} = \dot{d}_{n+1}^{i+1}, \quad \ddot{d}_{n+1} = \ddot{d}_{n+1}^{i+1}. \quad (25)$$

У [17] після детальних досліджень показано, що суворе обмеження часового кроку  $\Delta t$  у явних методах допускається не для всіх елементів системи, тому можна застосовувати в ітераційному процесі спільно методи явного і неявного інтегрування. Для цього в (20) і (21) необхідно для допустимих областей явного методу визначати елементи матриці  $K$  за явною схемою, а для інших областей за неявною схемою. Така модифікація ітераційного процесу може суттєво зменшити тимчасові витрати на розв'язання системи (22). Зазначена процедура закладена у програмному комплексі як варіант рішення.

Для чисельної реалізації запропонованої методики було розроблено програмний комплекс у системі Delphi, у якому реалізується рішення пружно-в'язкопластичних динамічних завдань за явною, неявною та комбінованою схемами інтегрування. Динамічний вплив може бути імпульсним, гармонійним, температурним чи у вигляді заданого у часі прискорення. Вихідний файл створюється у діалоговому режимі. Вихідна інформація виводиться у вигляді таблиць у файл виводу або екран монітора у вигляді різних епюр переміщень, напруг і пластичних зон на заданому відрізьку часу. Зазначена інформація в табличній або графічній формі може бути виведена на принтер.

Розглянуто застосування зазначеної вище методики на конкретному числовому прикладі. Нехай задано  $h_1 = 10,75$  м,  $h_2 = 6$  м, імпульсне навантаження інтенсивністю  $q_1 = 0,1$  МПа. Стінка залізобетонна з характеристиками для бетону:  $E = 30000$  МПа;  $\mu = 0,3$ ;  $\sigma_p = 1,5$  МПа;  $\sigma_c = 15$  МПа. Для ґрунтового масиву  $E = 20$  МПа;  $\mu = 0,3$ ;  $c = 0,02$  МПа;  $\varphi = 21^\circ$ . Час дії навантаження становить  $0,001$  сек, часовий крок  $\Delta t = 0,01$  сек, їх кількість дорівнювало 1020, тобто  $T = 10,2$  сек.

Параметри методу Ньюмарка  $\alpha = 0,25$  та  $\delta = 0,5$ . Використовувався неявний метод інтегрування.

На рис. 2 та 3 зображена загальна схема деформування системи при  $t = 1,5$  сек. та утворення пластичних зон у момент часу  $t = 9$  сек.

На рис. 4 і 5 представлені епюри компонентів  $u_x$  і  $u_y$  вектора переміщення точки  $A$ , показаної на рисунку 1 (в метрах). З епюр видно, що коливання  $u_x$  і  $u_y$  точки  $A$  відбуваються не відносно осей  $x$  і  $y$ , а відносно зміщених ліній. Це викликано тим, що після удару у масиві утворилися пластичні зони, що призвели до залишкових переміщень.

На рис. 6 і 7 показані епюри змін напруг  $\sigma_x, \sigma_y$  в точці  $A$  на відрізку часу від  $0$  до  $10,2$  сек. Тут також видно зміщення коливань напруг, що викликано утворенням залишкових напруг.

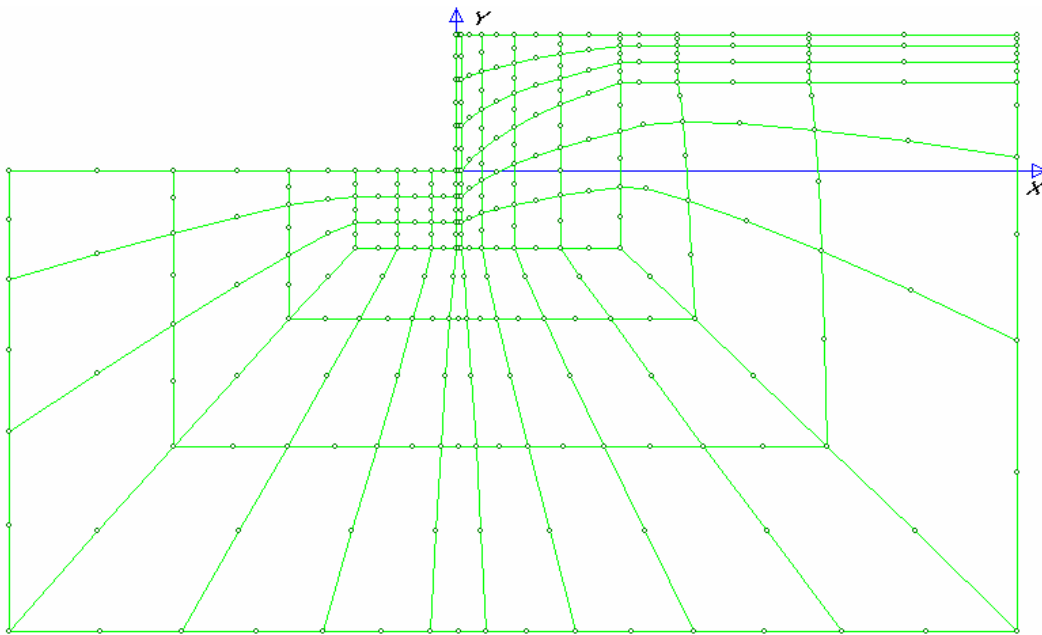


Рис. 2. Загальна схема деформування системи при  $t = 1,5$  сек.

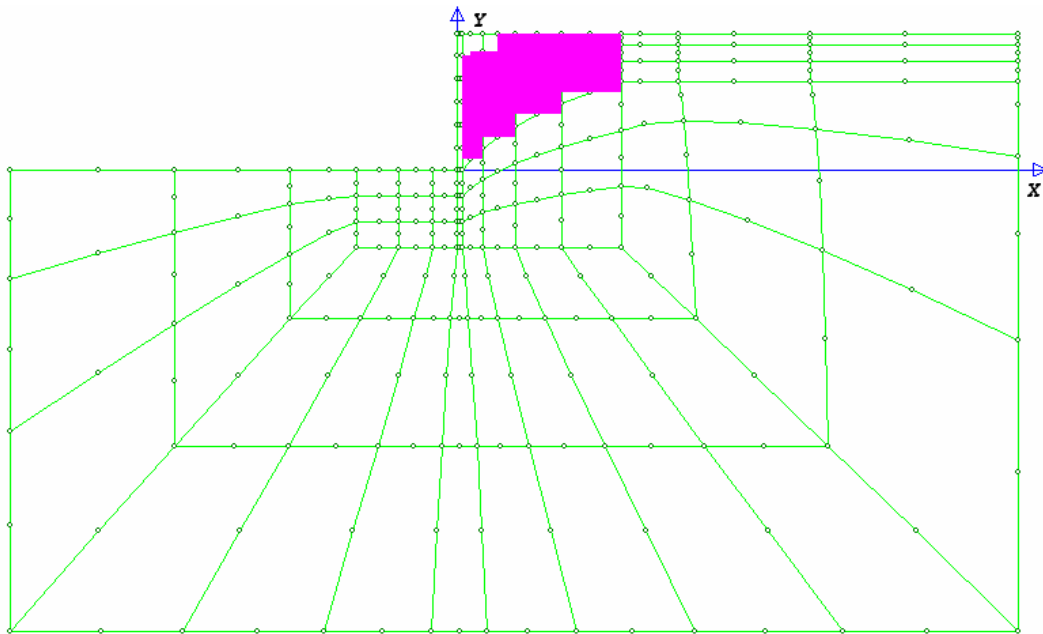


Рис. 3. Утворення пластичних зон на момент часу  $t=9$  сек.

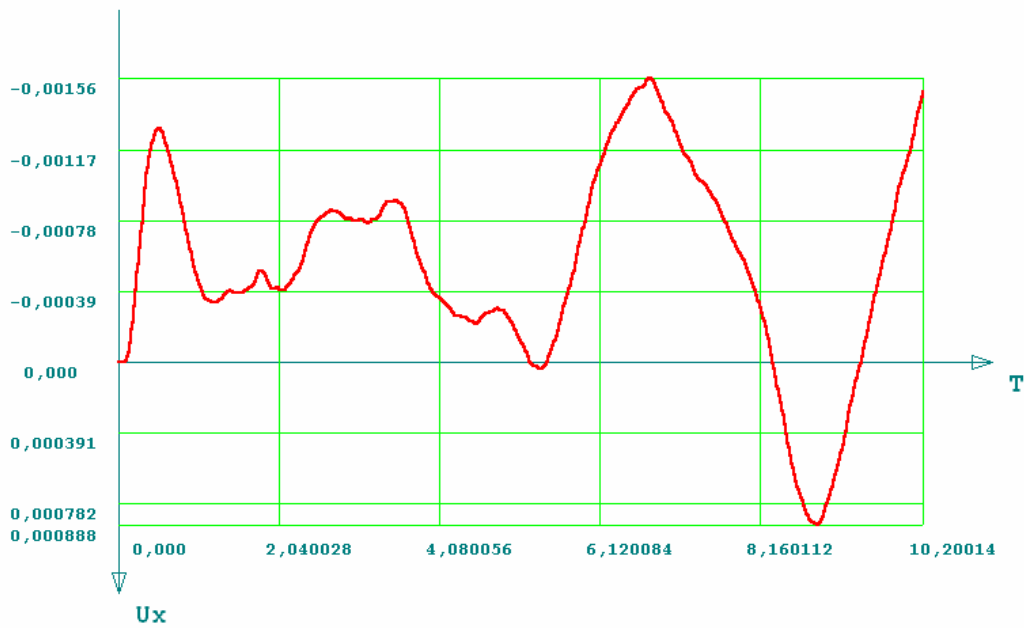


Рис. 4. Еюра компоненти  $u_x$  вектор переміщення точки  $A$ .

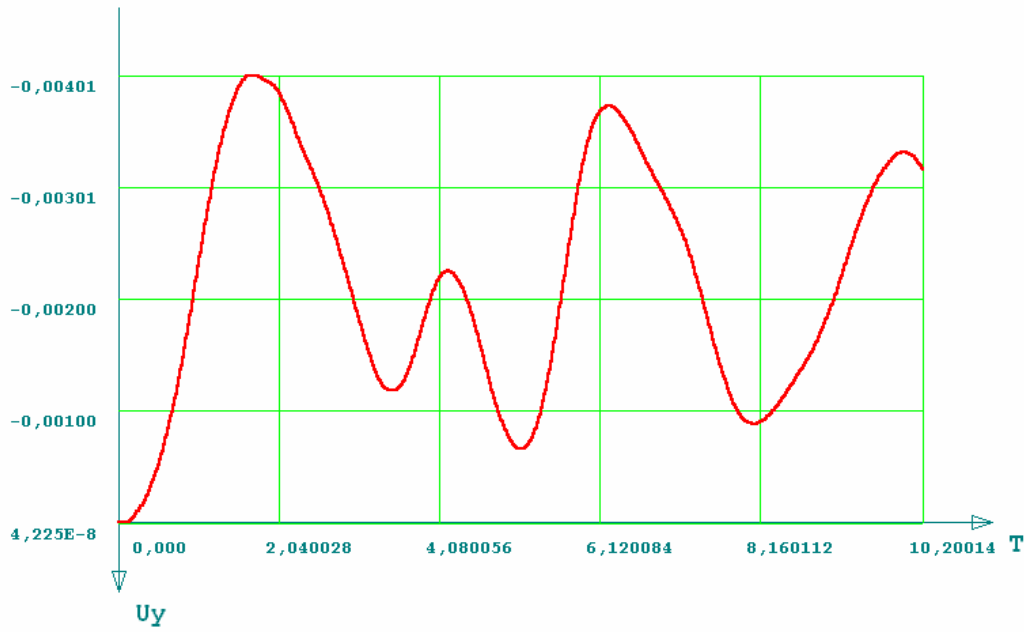


Рис. 5. Етюра компоненти  $u_y$  вектор переміщення точки  $A$ .

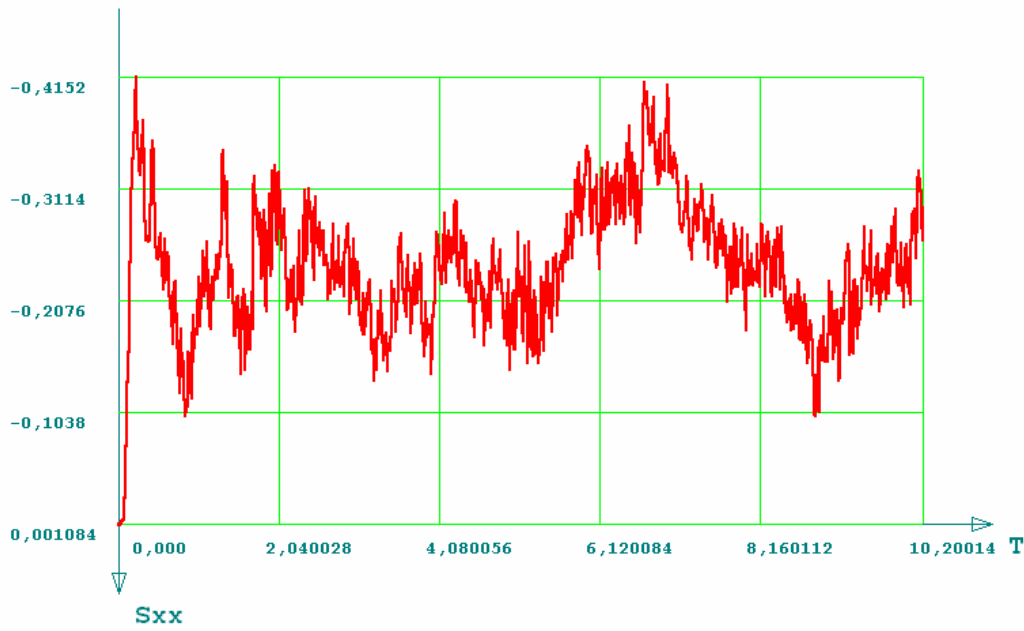


Рис. 6. Етюра напруг  $\sigma_x$  у точці  $A$  на відріжку часу від  $0$  до  $10,2$  сек.

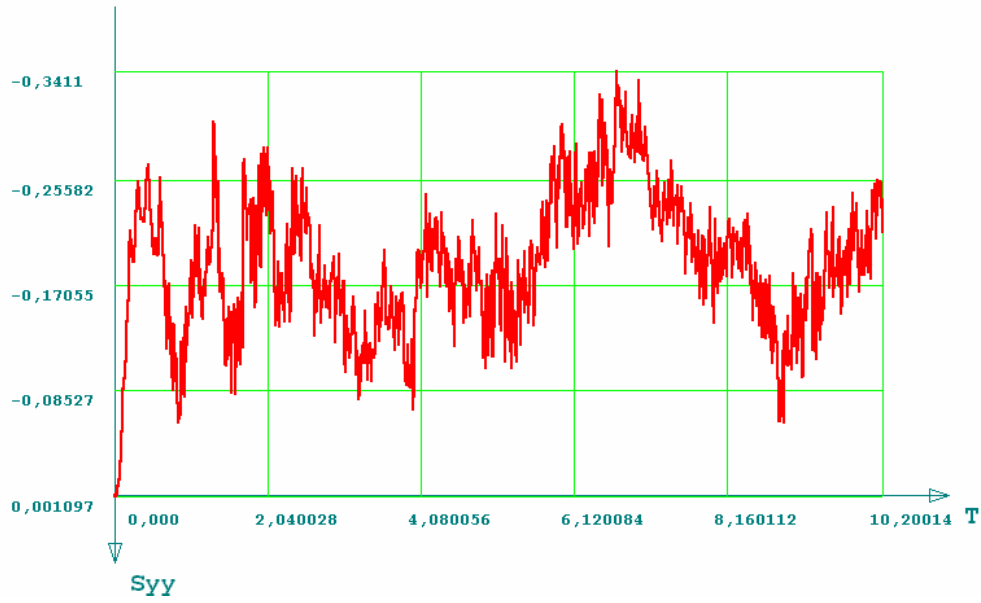


Рис. 7. Етюра напруг  $\sigma_y$  у точці А на відріжку часу від 0 до 10,2 сек.

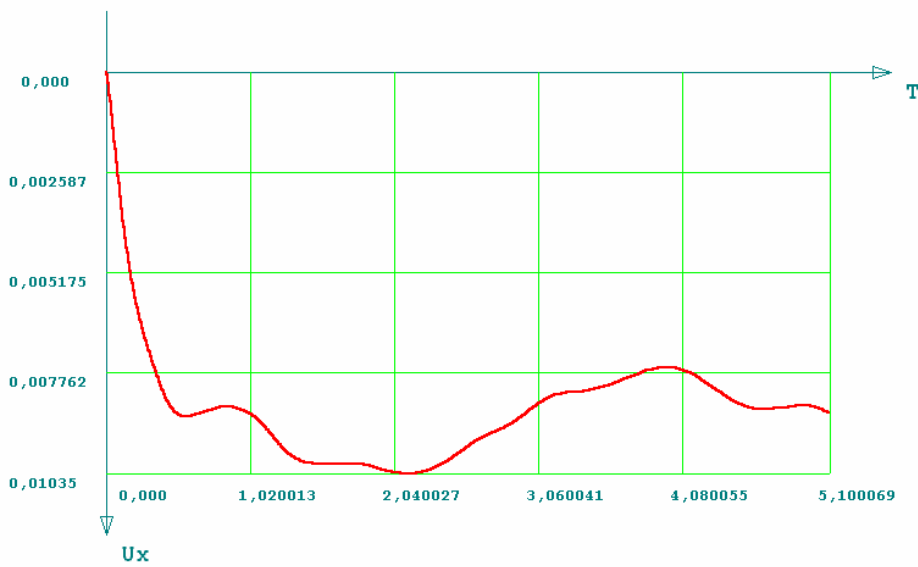


Рис. 8. Етюра коливань  $u_x$  у точці А на відріжку часу  $T=5,1$  сек.

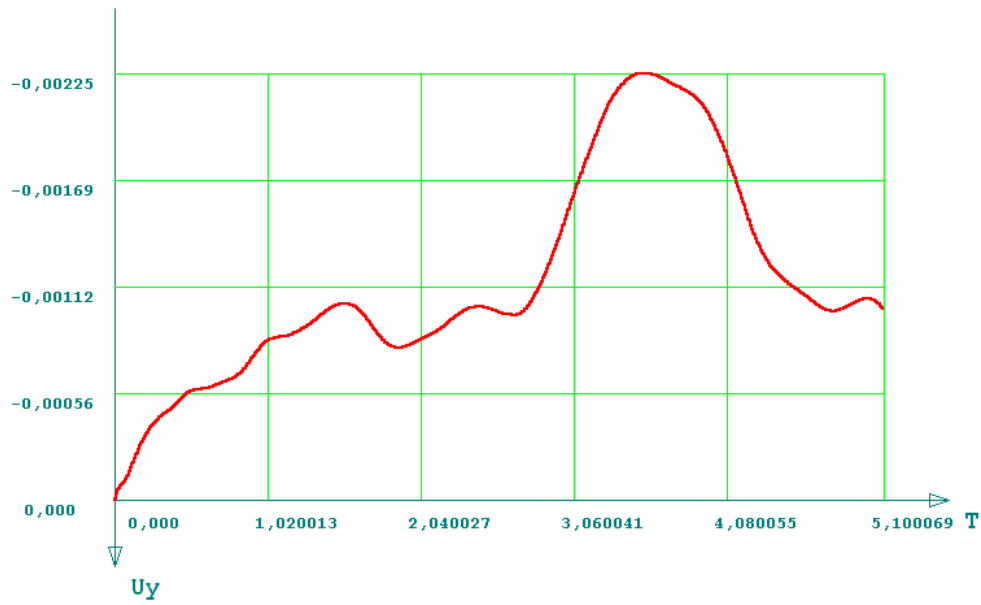


Рис. 9. Епюра коливань  $u_y$  у точці А на відрізку часу  $T=5,1$  сек.

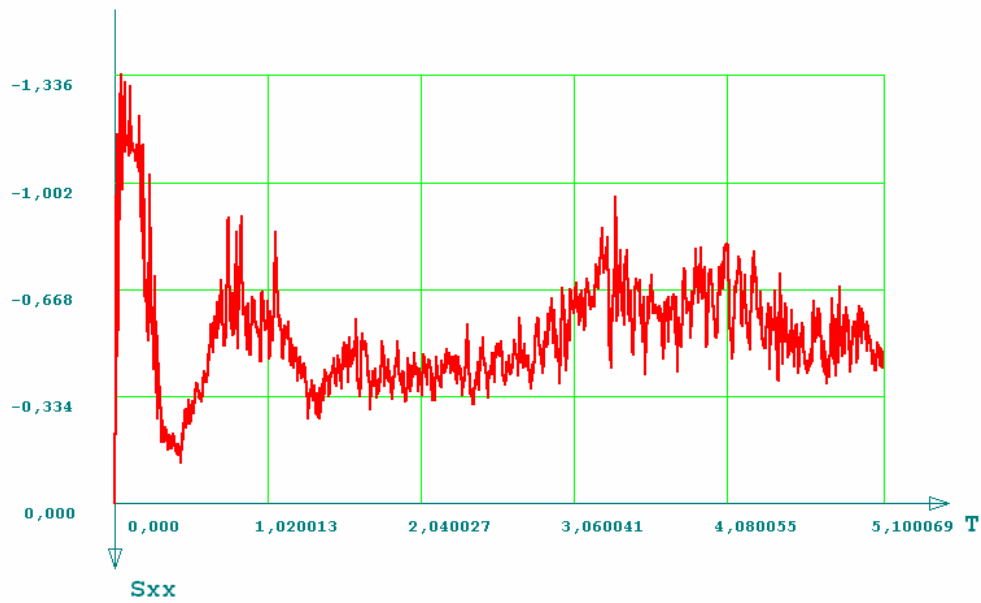


Рис. 10. Епюра напруги  $\sigma_x$  у точці А від дії навантаження  $Q_2$ .

Було виконано рішення при дії зосередженого горизонтального навантаження  $Q_2 = 20t$ . На рис. 8 і 9 наведено епюри коливань  $u_x$  і  $u_y$  у точці  $A$  на відрізку часу  $T = 5,1$  сек. при довжині часового інтервалу  $\Delta t = 0,005$  сек. Інші вихідні дані мали попередні значення. У момент удару відбувається різке зростання переміщення  $u_x$  з наступними незначними змінами. Пік переміщень  $u_y$  досягається при  $t = 3,3$  сек., потім настає їх стабілізація. Для напружень  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  відбувається різкий стрибок в момент удару, а потім настає їх стабілізація. Тут також спостерігались зміщення коливань переміщень і напруг, що пов'язано з їх залишковими значеннями.

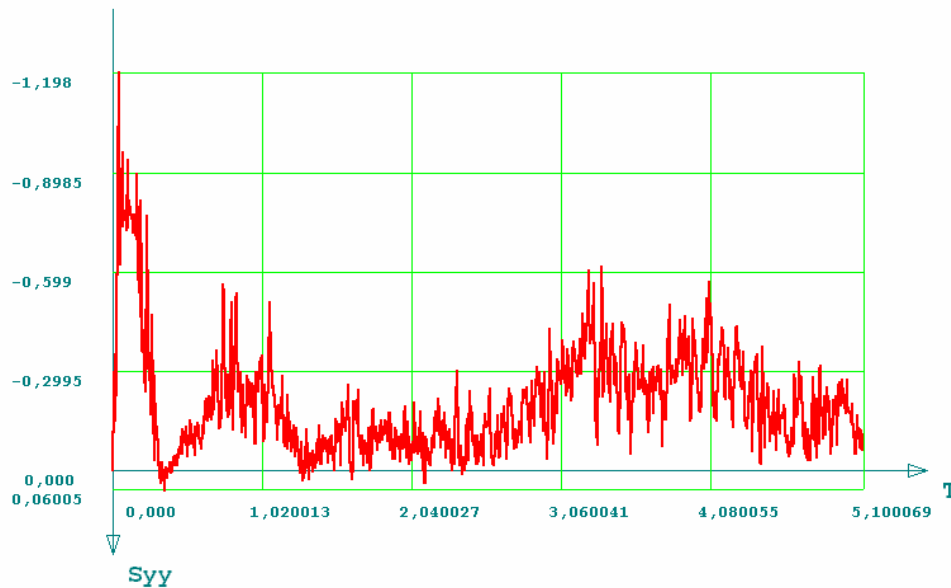


Рис. 11. Епюра напруг  $\sigma_y$  у точці  $A$  від дії навантаження  $Q_2$ .

Розроблена методика та програмний комплекс дозволяють проводити розрахунки різних конструкцій, що взаємодіють із ґрунтовим середовищем, від дії різного виду динамічних навантажень з урахуванням реальних властивостей їх матеріалів, як пружність, в'язкість та пластичність.

**Висновки**, які можна зробити з розглянутого в роботі прикладу полягають у тому, що розглянута споруда та ґрунтове середовище взаємопов'язані між собою. Зміна у часі властивостей одного елемента системи впливає на напружено-деформований стан іншого. Тому лише їхній спільний розрахунок дозволить отримати правильні результати. Крім того, при вирішенні динамічних задач необхідно враховувати деформації та напруги, що отримані від статичних навантажень, оскільки вони впливають на коливальний процес, що виникає при динамічному навантаженні системи.

Модель системи, що використовувалась в роботі, дозволила розглянути не тільки навантаження, що змінюється пропорційно до будь-якого параметра, що необхідно для деформаційних теорій пластичності, а й складне навантаження. Це дало змогу врахувати послідовність прикладання навантажень системи у процесі її зведення та експлуатації, що було реалізовано в алгоритмі рішення. Інерційні властивості моделі дозволили визначати хвильові коливальні процеси не тільки в елементах, до яких прикладено динамічне навантаження, а й у всій системі.

Динамічні впливи, що діють на спорудження, розглядалися не статичними, як це прийнято в посібниках та існуючих методиках розрахунку, а динамічними, що дозволило наблизити результати рішень до реальних зусиль, що виникають у системі.

Також було встановлено, що на початку фази вільних коливань гармонійні та імпульсні навантаження викликають переміщення та напруги, які перевищують їх значення у стабілізованому стані більш ніж удвічі. Отже, ці ефекти мають бути враховані під час проєктування підпірних споруд.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов Ю.М. Бетон при динамічному навантаженні. – К.: Будівельник, 1970. – 272 с.*
2. *Попов Н.М., Расторгуев Б.С., Забігаєв А.В. Розрахунок конструкцій на динамічні спеціальні навантаження. – К.: Наукова думка, 1992. – 319 с.*
3. *Красніков Н.Д. Динамічні властивості ґрунтів та методи їх визначення. – К.: Будівельник, 1970. – 233 с.*
4. *Миколайвський В.М. Механіка пористих і тріщинуватих середовищ. – К.: Будівельник, 1984. – 232 с.*
5. *Яковлев П.І. Стійкість транспортних гідротехнічних споруд. – К.: Наукова думка, 1986. – 191 с.*
6. *Івлев Д.Д., Биковцев Г.І. Теорія пластичного тіла, що зміцнюється. – К.: Наукова думка, 1971. – 231 с.*
7. *Писаренко Г.С., Лебедєв А.А. Деформування та міцність матеріалів при складному напруженому стані. – К.: Наукова думка, 1976. – 415 с.*
8. *Генієв Г.А., Кіссюк В.М., Тюпін Г.А. Теорія пластичності бетону та залізобетону. – К.: Будівельник, 1974. – 316 с.*
9. *Зарецький Ю.К. В'язкопластичність ґрунтів та розрахунки споруд. – К.: Будівельник, 1988. – 350 с.*
10. *Васідзу К. Варіаційні методи в теорії пружності та пластичності. – К.: Наукова думка, 1987. – 542 с.*
11. *Ставрогін О.М., Протосеня А.Г. Пластичність чорних порід. – К.: Будівельник, 1979. – 301 с.*
12. *Фадєєв А.Б. Метод кінцевих елементів у геомеханіці. – К.: Будівельник, 1987. – 221 с.*

13. Новожилов В.В. Теорія пружності, К.: Наукова думка, 1958. – 370 с.
14. В'ялов С.С. Реологічні основи механіки ґрунтів. – К.: Наукова думка, 1978. – 311 с.
15. Програмне забезпечення досліджень з механіки ґрунтів та фундаментобудування. – К.: Будівельник, 1991. – 527 с.
16. Zienkiewicz O.C. *The finite element method*. – McGraw – Hill Book Company (UK) Limited, 1986. – 787 p.
17. Бате К., Вілсон Е. Чисельні методи та метод кінцевих елементів. – К.: Будівельник, 1982. – 447 с.
18. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфування. – К.: Наукова думка. – 1988. – 448 с.
19. Клаф Р., Пензісн Дж. Динаміка споруд. – К.: Будівельник, 1979. – 319 с.

### REFERENCES

1. Bazhenov Yu. M. *Concrete under Dynamic Loading*. – K.: Budivelnik, 1970. – 272 p.
2. Popov N.N., Rastorguev B.S., Zabegaev A.V. *Calculation of Structures for Special Dynamic Loads*. – K.: Naukova Dumka, 1992. – 319 p.
3. Krasnikov N.D. *Dynamic Properties of Soils and Methods for Their Determination*. – K.: Budivelnik, 1970. – 233 p.
4. Nikolaevsky V.N. *Mechanics of Porous and Fractured Media*. – K.: Budivelnik, 1984. – 232 p.
5. Yakovlev P.I. *Stability of Transport Hydraulic Structures*. – K.: Naukova Dumka, 1986. – 191 p.
6. Ivlev D.D., Bykovtsev G.I. *Theory of a Hardening Plastic Body*. K.: Naukova Dumka, 1971. – 231 p.
7. Pisarenko G.S., Lebedev A.A. *Deformation and Strength of Materials under Complex Stress State*. K.: Naukova Dumka, 1976. – 415 p.
8. Geniev G.A., Kissyuk V.N., Tyupin G.A. *Theory of Plasticity of Concrete and Reinforced Concrete*. K.: Budivelnik, 1974. – 316 p.
9. Zaretsky Yu.K. *Viscoplasticity of Soils and Structure Calculations*. K.: Budivelnik, 1988. – 350 p.
10. Wasidzu K. *Variational Methods in the Theory of Elasticity and Plasticity*. K.: Naukova Dumka, 1987. – 542 p.
11. Stavrogin A.N., Protosenya A.G. *Plasticity of Ferrous Rocks*. K.: Budivelnik, 1979. – 301 p.
12. Fadeev A.B. *Finite Element Method in Geomechanics*. K.: Budivelnik, 1987. – 221 p.
13. Novozhilov V. V. *Theory of Elasticity*, K.: Naukova Dumka, 1958. – 370 p.

14. *Vyalov S.S. Rheological Foundations of Soil Mechanics. K.: Naukova Dumka, 1978. – 311 p.*
15. *Software for Research on Soil Mechanics and Foundation Engineering. – K.: Budivel'nik, 1991. – 527 p.*
16. *Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method. – McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1986. – 787 p.*
17. *Bate K., Wilson E. Numerical Methods and the Finite Element Method. – K.: Budivel'nik, 1982. – 447 p.*
18. *Nashif A., Jones D., Henderson J. Damping. – K.: Naukova Dumka. – 1988. – 448 p.*
19. *Clough R., Penzien J. Dynamics of Structures. – K.: Budivel'nik, 1979. – 319p.*

*Дата надходження статті: 10.02.2026*

*Дата прийняття статті: 09.03.2026*

*Дата публікації статті: 02.04.2026*